Ano 27º Lisboa, Dezembro 2011 Nº 295

Jornal de Mathemática Elementar

Endereço de Email PUBLICAÇÃO TRIMENSAL

jme@spm.pt

Director Honorário: Sérgio Macias Marques

Director: Jorge Nuno Silva **Preço:** ***1,80€*** **(IVA incluído)**

Chegamos, com este número, ao fim de 2011.

Esperamos ter correspondido às espectativas dos nossos leitores, e prometemos um 2012 com muitas novidades...

No espírito natalício, nestas páginas se dá notícia que o novo Circo chegou à cidade...

Bom Natal!

Jorge Nuno Silva

FICHA TÉCNICA

Registo nº 110029-ISSN 1646-978X
Nº Contribuinte 501065792
Impressão Repro 2000
Tiragem 1000 exemplares
Redacção e Administração
SPM. Av. da República, 45-3º
1050-187 Lisboa
Tel. 217 939 785

Galeria de Matemáticos

Pedro Raposo

César Augusto de Campos Rodrigues

1836 – 1919

A carreira de César Augusto de Campos Rodrigues confunde-se com as primeiras décadas de actividade do Observatório Astronómico de Lisboa (OAL), ao qual o astrónomo dedicou mais de 50 anos da sua vida. À semelhança de tantos outros percursos científicos de então, a longa carreira no observatório nacional português foi precedida pela carreira militar na marinha de guerra. Para um jovem aspirante nascido no Portugal dos anos 1830, tal significava passar por novos estabelecimentos de ensino emblemáticos do liberalismo, nomeadamente a Escola Politécnica. Ainda que o ensino ministrado neste estabelecimento não tenha necessariamente correspondido aquilo que dele se desejava em termos da aquisição de competências práticas e técnicas, , é indubitável que Campos Rodrigues, claramente dotado de uma particular aptidão para as questões mecânicas e de matemática aplicada, pode ai adquirir saberes que mais tarde teriam grande importância para o seu desempenho científico, no qual sobressaem três eixos fundamentais: os problemas práticos da instrumentação astronómica, o apuramento de técnicas de observação, e o desenvolvimento de ferramentas matemáticas para uma rápida e eficaz redução de dados observacionais.

Pouco se sabe da infância de Campos Rodrigues. Frequentou o Liceu de Lisboa e o Real Colégio Militar, e em 29 de Agosto de 1851 assentou praça na companhia dos guardas-marinhas, como aspirante de 3ª classe. Passou a aspirante de 2ª classe em 30 de Julho do mesmo ano. Fez seguidamente uma viagem de instrução ao Mediterrâneo na corveta Porto, permanecendo embarcado ate 7 de Outubro. Depois frequentou a Escola Politécnica, onde conclui o curso preparatório de Marinha em 20 de Fevereiro de 1854. No mesmo ano foi promovido a aspirante de 1ª classe, em 14 de Julho. Passou depois a Escola Naval, concluindo o respectivo curso em 3 de Julho de 1855. Oito dias depois foi nomeado para embarcar no brigue Mondego, de modo a efectuar viagem a Macau e estadia nos mares da China, como parte do percurso de oficial. A viagem proporcionar-lhe-ia, ainda que de forma indirecta, o primeiro contacto com um projecto com características da ciência humboldtiana, nomeadamente a recolha extensiva de dados quantitativos relativos a fenómenos naturais, por meio de uma rede ampla de observadores munidos dos instrumentos apropriados, e tendo em vista o mapeamento exaustivo de determinadas propriedades físicas do globo. Mais tarde, como astrónomo no OAL, Campos Rodrigues envolver-se-ia nos amplos levantamentos cartográficos do universo sideral que, embora enraizados numa longa tradição de observações astronómicas, também ecoavam este espírito de proceder a uma caracterização e mapeamento exaustivos do mundo natural por meio da medição exacta. Enquanto jovem aspirante a bordo do Brigue Mondego, no qual embarcou em 11 de Julho de 1855 para a missão a Macau, Campos Rodrigues foi incumbido, juntamente com o seu companheiro de armas e amigo pessoal José Feliciano de Castilho (1838-1864), de efectuar registos regulares de elementos meteorológicos e oceanográficos de acordo com os protocolos estabelecidos pelo superintendente do Observatório Naval dos Estados Unidos, Matthew Fountaine Maury (1806-1873). Maury desencadeara uma recolha alargada e sistemática de dados oceanográficos, distribuindo pelos navegantes norte-americanos um Abstract Log for the use of American Navigators que deveria ser preenchido durante as viagens e posteriormente devolvido ao Observatório Naval. Este procedimento foi depois estendido a nível internacional, chegando também às embarcações portuguesas.

A incumbência de seguir os protocolos de Maury serviu não só para revelar as aptidões de Campos Rodrigues (o próprio Maury assinalou a qualidade do diário náutico do brigue Mondego numa carta a Guilherme Dias Pegado, do Observatório Infante D. Luiz, em 1857), mas também um traço marcante da sua personalidade, que obriga a um esforço adicional por parte dos historiadores e biógrafos que pretendam debruçar-se sobre este cientista. À semelhança do que viria a fazer em muitas outras ocasiões, descartou qualquer mérito na elaboração dos registos oceanográficos e meteorológicos a bordo do Mondego em prol do seu camarada Castilho. Assim se revelavam o desprendimento e a modéstia excessiva, que amiúde o levariam a deixar os seus créditos por mãos alheias e a adiar sine die a publicação dos seus trabalhos, para o que também terá contribuído um vincado perfeccionismo. É certo que as várias notas biográficas deixadas por contemporâneos próximos do astrónomo enfermam de um compreensível tom hagiográfico que, muito provavelmente, levou a exagerar a preponderância de tais traços psicológicos. Mas estes são, em geral, consistentes com o que se pode apurar do seu percurso e modus vivendi, e é nítido que também incluíam uma tendência para o recato e o isolamento, ao que a carreira no OAL proporcionou um enquadramento perfeito. Campos Rodrigues seria o consumado astrónomo cenobita, confinado ao seu templo científico e alheado da vida académica e do frenesim político do seu tempo – uma forma de estar altamente contrastante com a sucessão e, amiúde, acumulação de cargos académicos, administrativos e políticos, típicas das carreiras dos homens de ciência de então.

A missão no brigue Mondego durou ate 22 de Janeiro de 1860. Rodrigues havia sido promovido a guarda-marinha em 4 de Outubro de 1856. Em 1858, recebeu um louvor pela bravura alegadamente manifestada na retoma de duas embarcações portuguesas e no aprisionamento de piratas nos mares da China. Em 22 de Dezembro daquele ano foi promovido a 2º tenente. A missão aos mares da China foi seguramente o período mais aventuroso de uma vida que iria essencialmente ser passada entre as paredes do OAL. Em 1859, o jovem oficial assistiu ao bombardeamento de Cantão pela esquadra inglesa. A 20 de Janeiro de 1860, o brigue Mondego naufragou no Oceano Índico. Houve baixas significativas, mas Campos Rodrigues contava-se entre os membros da tripulação que foram resgatados por uma embarcação americana e reconduzidos a Portugal. Depois da aventurosa missão naval, Rodrigues prestou serviço no registo do Porto de Lisboa e fez pilotagem fora da barra da capital, dedicando-se a estas funções entre Maio e Setembro de 1860. Obteve então licença para obter o diploma de engenheiro hidrógrafo, o que implicava regressar aos bancos da Escola Politécnica. Matriculou-se no curso respectivo, juntamente com o seu amigo e camarada de armas José Feliciano de Castilho, muito provavelmente o mais íntimo que teve na sua juventude. O curso conducente ao título de engenheiro hidrógrafo foi oficialmente completado em 20 de Julho de 1863. Campos Rodrigues foi seguidamente nomeado para efectuar o tirocínio em engenharia hidrográfica, que concluiu em 11 de Agosto de 1865. Em Setembro foi admitido no Instituto Geográfico dirigido por Filipe Folque (1800-1870), que, juntamente com Frederico Augusto Oom (1830-1890), o terá sondado já nesta altura para vir a integrar o pessoal do OAL, na altura ainda em fase de construção.

O OAL fora fundado em 1857 com o patrocínio de D. Pedro V e com o apoio de Friedrich Georg Wilhelm Struve (1793-1864), director do Observatório Central de Pulkovo na Rússia. Struve vira no estabelecimento do novo observatório em Lisboa uma oportunidade para desenvolver a astronomia estelar, nomeadamente no que concerne à medição de paralaxes estelares e ao estudo das nebulosas. As condições geográficas favoráveis a esses estudos oferecidas por Lisboa haviam chamado a atenção de Struve devido a um debate travado com Hervé Faye (1814-1902), do Observatório de Paris, entre 1847 e 1850, em torno da paralaxe da estrela 1830 do catálogo Groombridge. Resultados de observações efectuadas nos observatórios de Pulkovo, Paris e Konigsberg, envolvendo diferentes métodos e instrumentos, haviam sido inconclusivos, pelo que, em 1850, Faye e Struve anuíram em promover o desenvolvimento destas investigações em Lisboa. Faye foi o primeiro a prontificar-se para apoiar uma iniciativa portuguesa nesse sentido, e chegaram mesmo a ser efectuadas algumas diligências, na sequência de um discurso proferido na Câmara dos Pares, em 26 de Marco de 1850, por D. Francisco de Almeida Portugal, Conde do Lavradio. Vendo aqui uma oportunidade para dignificar na cena internacional um Portugal politica e culturalmente acanhado e subserviente, Lavradio apelara a uma activa resposta portuguesa face ao interesse manifestado pelos cientistas estrangeiros. No entanto, a ineficiência da comunicação e articulação entre as instituições envolvidas, a que acresceu a inevitável confusão gerada pelo golpe da Regeneração de 1 de Maio de 1851, tornaram inúteis as diligencias entretanto tomadas. A fundação de um novo observatório na capital portuguesa só tomou forma efectivamente em Janeiro de1857, quando D. Pedro V concedeu 30 contos de reis da sua dotação pessoal para apoiar a fundação do novo observatório. Os trabalhos de construção tiveram início em 1861, mas a morte do monarca nesse mesmo ano comprometeu o progresso dos trabalhos, que só terão arrancado em força em 1864, e que, ainda assim, teriam uma progressão lenta, com o observatório a ser efectivamente concluído, pelo menos a nível das suas estruturas fundamentais, apenas no final da década de 1870. Tendo surgido, essencialmente, como um projecto de carácter simbólico assente em mecenato real, o OAL nunca foi devidamente inscrito nas políticas de fomento do fontismo, e só com dificuldade se chegou à efectiva materialização dos planos originais.

Rodrigues recusou este primeiro convite, alegando não estar preparado para as funções que lhe eram propostas. Oom, que, entre 1858 e 1863, estagiara em Pulkovo e visitara vários observatórios e oficinas de instrumentos de modo a preparar-se para ser o primeiro director do OAL, ocupava-se então dos trabalhos de construção das estruturas arquitectónicas relacionadas com a observação. Rodrigues foi entretanto efectuar o levantamento hidrográfico da barra e do porto de Caminha. Durante estas actividades teve a iniciativa de desenvolver algumas técnicas de trabalho de campo no sentido de efectuar observações e medições de forma precisa mas expedita, espírito no qual, posteriormente, efectuaria várias intervenções no equipamento do OAL. Desta fase de dedicação à engenharia geográfica, ficaram registos de técnicas que desenvolveu relativamente à medição de distâncias horizontais com o taqueómetro, ao cálculo de áreas delimitadas nas cartas por linhas curvas, e ao denominado problema dos três pontos ou problema de Pothenot, que se referia à projecção de um determinado ponto a partir de três pontos inacessíveis, no âmbito de uma rede primária de triângulos.

O levantamento hidrográfico em Caminha foi concluído em 1868. Em Janeiro de 1869, Rodrigues passou finalmente a integrar o pessoal do OAL que, na altura, carecendo ainda de um enquadramento institucional próprio, passou a constituir a Secção Astronómica da Direcção Geral dos Trabalhos Geodésicos (liderada por Folque) após a inclusão no Depósito Geral da Guerra, que teve uma existência breve. O ingresso no OAL marca o início de um longo período de quase reclusão no OAL e de total dedicação ao serviço do observatório. F. A. Oom, que com Rodrigues completava o pessoal científico do OAL, empenhar-se-ia na frente política para fazer vingar, em termos estatutários, o projecto que originalmente servira de base a sua edificação, pesem embora as dificuldades que localmente se opunham à sua concretização e ao próprio progresso da ciência astronómica, que se via agora enriquecida com as técnicas espectroscópicas e fotográficas para fazer avançar a astronomia estelar. O OAL permaneceria confinado às técnicas da tradicional astronomia de posição, mas com o seu potencial reforçado por muitas contribuições originais de Rodrigues. No entanto, um dos seus primeiros trabalhos dignos de nota foi o desenvolvimento de um aparato para efectuar fotografias sequenciais do trânsito de Vénus de 1874. Os astrónomos viam na medição deste fenómeno raro (que, geralmente, acontece aos pares, com um intervalo de oito anos entre cada trânsito, em períodos de 105,5 ou 121 anos) uma oportunidade para refinar o valor da paralaxe solar (o ângulo subtendido pelo raio equatorial terrestre no centro solar, à distância média Terra-Sol), um parâmetro essencial para a determinação de todas as restantes distâncias astronómicas, já que permite obter a distancia Terra-Sol. Apesar das aparatosas expedições organizadas no século XVIII para observar os trânsitos de Vénus de 1761 e 1769, os resultados foram grandemente comprometidos pela falta de uniformização de métodos e técnicas, pelo deficiente conhecimento das longitudes dos locais de observação, e pelas dificuldades inerentes à realização de observações astronómicas de precisão em estacões improvisadas. Os trânsitos de 9 de Dezembro de 1874 e 6 de Dezembro de 1882 eram especialmente apelativos porque se acreditava poder-se agora captar o fenómeno com grande exactidão através da aplicação de técnicas fotográficas. Vários aparatos foram concebidos nesse sentido, entre os quais o mais célebre é certamente o revólver fotográfico de Pierre Jules Janssen (1824-1907). Este género de dispositivos teria um significativo impacto cultural uma vez que a captação sequencial de imagens, sua função essencial, constituiu a base técnica para o desenvolvimento do cinema. No seu âmbito original, todavia, nem os revolveres nem os restantes aparatos e métodos fotográficos resolveriam o problema da determinação exacta da paralaxe solar, uma vez que também aqui surgiram as habituais disparidades metodológicas entre diferentes astrónomos e grupos, e a medição das chapas fotográficas era também afectada de erros subjectivos significativos. O dispositivo concebido por Rodrigues não chegou sequer a ser utilizado, pois os planos efectuados por F. A. Oom e João Brito Capello (1831-1901) para efectuar uma expedição a Macau não receberam a necessária aprovação parlamentar, com base em argumentos financeiros mas, muito provavelmente, devido a rivalidades latentes entre Lisboa e Coimbra, e a tentativa, da parte de F. A. Oom, de imprimir uma forte marca do OAL a iniciativa, de modo a consolidar o estatuto da instituição enquanto observatório nacional. Procurou-se ultrapassar estas dificuldades por ocasião do trânsito de 1882, através do envolvimento de António dos Santos Viegas (1835-1910), professor de Física em Coimbra, mas, por motivos que importa ainda clarificar, também esta expedição, destinada a Lourenço Marques, ficou sem efeito.

O aparato de Rodrigues diferia dos revólveres que então estavam a ser desenvolvidos na França e na Inglaterra. Baseava-se no princípio de que a cúpula do telescópio em uso funcionaria como câmara escura, ficando o obturador instalado na própria cúpula. As chapas fotográficas seriam trocadas manualmente, sendo possível disparar ate três chapas por minuto. A sua medição seria posteriormente efectuada utilizando a mesma ocular para, por meio de projecção inversa, se reconstituir a imagem original e eliminar as distorções decorrentes dos defeitos ópticos da ocular e da própria granulação da chapa. Este sistema foi possivelmente empregue, a título meramente experimental, na observação fotográfica do eclipse parcial do Sol de 5 de Agosto de 1905, mas a sua utilização não terá ido além disso.

Aparte esta invenção fotográfica, os trabalhos efectuados no OAL ao longo da década de 1870 incidiram sobretudo na finalização das estruturas arquitectónicas directamente relacionadas com a actividade observacional (salas de observação, alçapões, cúpulas externas, etc.), com a elaboração de listas de estrelas para a realização de observações regulares, e com o desenvolvimento de ferramentas matemáticas para tornar mais expedita a redução dos dados observacionais. Fazendo uso da experiência adquirida enquanto engenheiro hidrógrafo e dando-lhe continuidade, Rodrigues foi tão prolífico neste ultimo campo como na concepção de acessórios e aperfeiçoamentos para os instrumentos do OAL, tendo elaborado réguas especificamente adaptadas aos seguintes cálculos: partes proporcionais de tempo, colimação, distância dos fios horários de um retículo de passagens, correcção do azimute ou inclinação, redução de tempo sideral a tempo médio (e vice-versa), distâncias focais recíprocas de uma objectiva, redução da marcha real de uma pêndula padrão à marcha normal, e soma dos quadrados de vários números dados. Na mesma tradição de auxiliares matemáticos empregues em engenharia, construiu várias ferramentas de cálculo gráfico, cobrindo as seguintes operações: redução de passagens ao meridiano; correcção da marcha da pêndula-padrão; correcção das leituras, do nível do círculo meridiano em função da temperatura; correcção das leituras micrométricas em função do excesso de uma volta de parafuso sobre uma divisão exacta do círculo graduado do círculo meridiano; cálculo da precessão de 1855 a 1900; conversão do azimute ou da inclinação em coeficientes m e n da fórmula de Bessel; cálculo dos termos lunares na redução diária das posições estelares.

No que concerne à década de 1870, é ainda de referir o contributo do OAL para os primeiros testes telefónicos em Portugal, que tiveram inicio em 1876 e nos quais o Observatório colaborou com o Observatório Infante D. Luiz. Em Dezembro de 1877 Campos Rodrigues e F. A. Oom participaram numa chamada experimental que ligou o OAL a Escola Politécnica, onde o rei D. Luís presenciava a atribuição de prémios aos estudantes, e de onde pode ouvir a música que os astrónomos do OAL fizeram tocar no observatório para que o soberano, conhecido pela sua melomania, a pudesse apreciar via telefone.

Os trabalhos de observação sistemática só terão começado após a aprovação da Lei Orgânica do Real Observatório Astronómico de Lisboa, em 6 de Maio de 1878, que consagrava o OAL, como originalmente se pretendia, ao estudo das paralaxes estelares e das nebulosas. No entanto, a lentidão na conclusão dos trabalhos de construção e equipagem do OAL, aliada à falta de pessoal qualificado, inviabilizaram a concretização deste programa. Seria na vertente do serviço público, e sobretudo na transmissão da hora oficial, que F. A. Oom, Campos Rodrigues e Augusto Alves do Rio (oficial de Marinha que serviu como astrónomo de 2ª classe, isto é, auxiliar, entre 1878 e 1887) concentrariam os seus esforços. As observações regulares de tempo com instrumentos de passagens portáteis Repsold (fornecidos pela firma alemã em 1866 e 1868, ambos incorporando um sistema de inversão concebido por F. A. Oom), tiveram início em 1878 e haveriam de se prolongar até à década de 80 do séc. XX. As observações de uma série definida de estrelas, efectuadas todas as noites em que o estado do tempo o permitia, eram reduzidas de modo a poder-se efectuar o acerto das pêndulas e transmitir a hora do meridiano do observatório para uma sistema de sinal horário instalado desde 1858 no Arsenal da Marinha. Neste aparato, à semelhança dos existentes em Greenwich e de muitos outros observatórios e portos de todo o mundo, um balão (mais propriamente, uma esfera metálica) era içado ao topo de um mastro, provocando-se a sua queda a 1:00 local. Todavia, reflectindo a própria debilidade do Observatório da Marinha (extinto em 1874) a que fora inicialmente associado, o dito balão horário do arsenal revelara-se pouco fiável. Em 1884 foi solicitado a F. A. Oom e a Campos Rodrigues que desenvolvessem um sistema mais exacto em que o envio do sinal horário do OAL desencadeasse a queda automática do balão. O novo sistema foi inaugurado em 1885. A queda e o sinal de origem passaram a ser minuciosamente monitorizados. Os respectivos erros, que geralmente não iam além de alguns décimos de segundo, eram publicados quinzenalmente no Diário do Governo. Tal minúcia era certamente muito mais um atestado de precisão científica colocado ao serviço da nação do que uma exigência da navegação, à qual o balão horário primariamente se dirigia. Mas era nesse espírito que F. A. Oom (oficialmente empossado como director em 1878) dirigia o observatório, e que Rodrigues, na sua vida ensimesmada, se entregava ao estudo e aperfeiçoamento do equipamento científico do OAL.

O Circo Matemático

Jorge Nuno Silva

"Maravilhar, divertir e atrair para a matemática mediante a realização de atividades lúdicas variadas. A Matemática Recreativa levada à cena: um espaço de degustação intelectual baseada na magia matemática!"

http://ludicum.org/cm

Assim se apresenta este grupo, que atua em escolas, eventos, espaços públicos, etc., e que tanto tem encantado com recurso à matemagia!

Um espetáculo circense estritamente matemático pode parecer impossível, mas o Circo Matemático fá-lo amiúde, para grande contentamento das audiências.

Hoje publicamos um artigo de Pedro Freitas – um elemento do Circo —, explicando um truque de cartas que faz parte do reportório do grupo.

O show compõe-se de muitas atividades que não usam cartas, mas esperamos dar uma ideia do tipo de matemática que é imersa e pode ser apresentada como Magia... Outras se seguirão nas páginas do nosso jornal, se tudo correr bem!

Quatro montes

Pedro Freitas
DM-FCUL

Começa-se por pedir a uma pessoa que escolha uma carta, à sua vontade, e que a coloque, de face para baixo, em cima de 8 cartas que estão sobre a mesa, também de face para baixo. Sobre estas nove cartas coloca-se o resto do baralho, também de face para baixo.

Começamos agora a fazer quatro montes de cartas, tirando as cartas de cima do baralho e dizendo os números de 10 a 1, por ordem decrescente, um por cada carta virada. Se o número dito coincidir com o número da carta virada, paramos e iniciamos um novo monte. Se nunca houver coincidência, colocamos uma carta virada para baixo sobre o monte, e passamos ao monte seguinte.

Quando temos quatro montes, somamos as pintas das cartas que estão no topo dos montes, obtendo um número n. A carta escolhida inicialmente será então a n-ésima carta do que resta do baralho. No caso (pouco vulgar) de os quatro montes estarem tapados, a carta escolhida é a que tapou o último monte.

A explicação para este truque baseia-se simplesmente no facto da carta que está em 9º lugar a contar de baixo, no baralho, ser a que está em 44º lugar a contar de cima --- 52-9+1=44. Ora, cada monte vai contribuir com 11 cartas, independentemente da carta que tem por cima. Se estiver tapado, tem efectivamente 11 cartas. Se não estiver, como os números são ditos de forma decrescente, o que se conta efectivamente é o numero de cartas que faltam para o monte ter 11 cartas. Assim, ao tirá-las no fim, completamos o que falta para o monte respectivo ter 11 cartas.

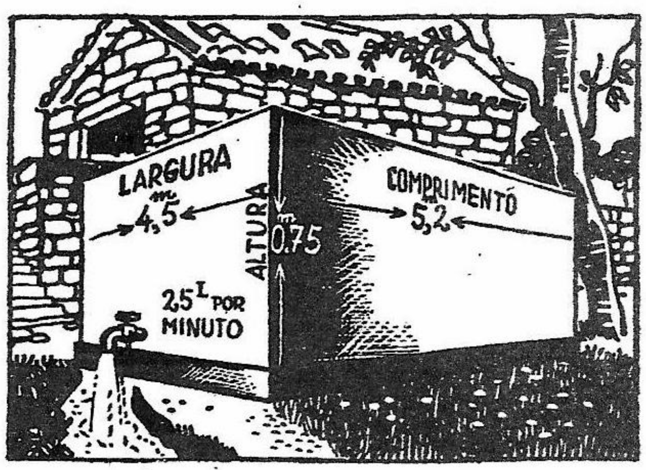
Problemas de Outros Tempos (6º)

Helder Pinto

O problema apresentado neste Jornal de Mathemática Elementar é novamente retirado do livro “1111 Problemas” e é definido como sendo um problema de “aplicação de medidas de volume”. Trata-se, de facto, de um problema simples onde a única coisa que se pede é a determinação do volume de um paralelepípedo. Note-se que, curiosamente, a figura que acompanha este problema contém uma informação (que o tanque esvazia a 25 litros por minuto) que é totalmente desnecessária à sua resolução. Por outro lado, observa-se algum desfasamento com a prática pois o aumento da capacidade dos tanques faz-se, em geral, aumentando a sua altura e não ampliando para os lados, o que simplifica a construção – basta ir adicionando fiadas de tijolos ao que já está construído.

Como é habitual neste tipo de exercícios, o problema em si é precedido de um longo preâmbulo onde se valorizam as qualidades morais e éticas vigentes à época. Em primeiro lugar é valorizado o viver no campo onde se pode encontrar "o perfume e encanto das flores até ao doce e alegre cantar das avezinhas". De seguida, o facto de esta criança "tratar e regar o pequenino jardim" com muito zelo e cuja única recompensa era "a consolação de oferecer a seus pais as mais belas flores daqueles sítios". Valoriza-se não só o facto de a criança cumprir as suas tarefas domésticas, bem como a relação familiar entre pais e filhos onde a gratidão aos pais não podia faltar.

Nesta secção do Jornal de Matemática Elementar estamos a apresentar alguns problemas de matemática que foram publicados em livros escolares portugueses do passado. Como usual, contámos com a colaboração dos nossos leitores fazendo-nos chegar cópias de problemas antigos que considerem interessantes para o e-mail *hbmpinto1981@gmail.com.*



Maria Manuela vivia com seus pais numa linda quinta, onde nada faltava, desde o perfume e encanto das flores até ao doce e alegre cantar das avezinhas.

O seu maior prazer era tratar e regar o pequenino jardim para ter a consolação de oferecer a seus pais as mais belas flores daqueles sítios.

Várias vezes abriu o tanque, que ficava perto da casa da arrecadação, e lamentava que ele não fosse maior, pois nem sempre regou, como desejava, todos os seus canteirinhos.

No dia em que seu pai fez anos, pediu-lhe que mandasse acrescentar $1^{m},8$ no comprimento do tanque, porque, assim, já ela teria mais água e poderia oferecer-lhe mais flores.

Quem diz os metros cúbicos de água que ficará a levar o tanque, se for aumentado, conforme o desejo de Maria Manuela?

12
Gouveia, F. C., Ferreira, J. G., Júdice, F. A. S.; *1111 Problemas de Aritmética e Geometria (4.ª Classe)*; Emprêsa Contemporânea de Edições; Lisboa, s/a (2.ª edição); p. 39.

Bento de Jesus Caraça na conquista da liberdade

Conversa com jovens do 10º, 11º e 12º anos na Escola Secundária da Moita
por ocasião do centenário da República

Paulo Almeida

1. Um jovem no Portugal do seu tempo

Os alunos da Escola Secundária da Moita têm a sorte de poder ler os livros que se encontram nesta vila na Biblioteca Municipal Bento de Jesus Caraça. Mas puseram à Biblioteca o nome de *Bento de Jesus Caraça*??!!! Por que razão evocar assim essa pessoa, nascida no longínquo ano de 1901, e que afinal foi um jovem como tantos outros jovens do seu tempo... e de hoje!!!!

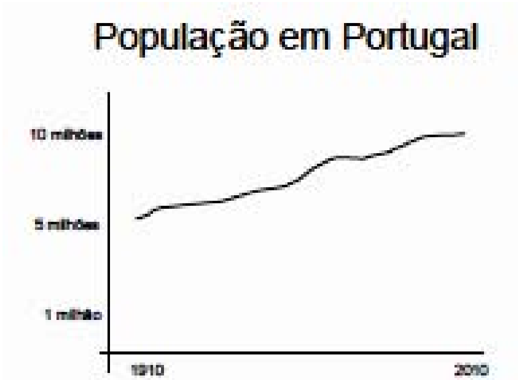
O mundo desse jovem era, é claro, bem diferente do que é hoje!! Só para termos uma ideia, em1910, ano em que foi implantada a República em Portugal, em cada 100 pessoas tomadas ao acaso só 25 saberiam ler e escrever – actualmente em Portugal, em cada 100 pessoas tomadas ao acaso, 91 sabem ler e escrever.

População em Portugal sabendo ler e escrever	
• 1910	**25%**
• 2010	**91%**

Em 1910 o número de alunos do e*nsino secundário* (com idades correspondendo às dos alunos dos actuais 10º, 11º e 12º anos) era aproximadamente 2000 – actualmente em Portugal o número de alunos do ensino secundário é de cerca de 300 000. Em 1910 o número de alunos do *ensino universitário* era aproximadamente 1200 – actualmente em Portugal o número de alunos do ensino universitário é de cerca de 250 000.

Alunos do ensino secundário (10º, 11º, 12º)		Alunos do ensino universitário	
• 1910	**2000**	• 1910	**1250**
• 2010	**300 000**	• 2010	**250 000**

Quer dizer que nos últimos 100 anos o número de alunos do secundário aumentou cerca de 150 vezes e o número de alunos universitários aumentou 200 vezes, enquanto nesse período a população em geral apenas duplicou ou seja aumentou 2 vezes.



Sem dúvida que Portugal progrediu muito no que respeita a instrução pública e a alfabetização, mas é bom termos consciência do que falta ainda fazer; o seguinte quadro fala por si, pois mostra que ainda não chegamos a atingir o estado em que se encontrava a Inglaterra, a Alemanha ou a Suécia há 100 anos atrás!!!!!!!!!!!!!!!

População em Portugal sabendo ler e escrever		População noutros países sabendo ler e escrever **em 1910**	
• 1910	**25%**	• Inglaterra	**99%**
• 2010	**91%**	• Alemanha	**99,5%**
		• Suécia	**99,6%**

Por outro lado não deixa de ser preocupante a evolução do número de estudantes no ensino secundário:

Mas a que vem tudo isto? A instrução em Portugal mudou para muito melhor é certo! No que respeita a instrução do Povo é de destacar a obra da Primeira República, nascida a 5 de Outubro de 1910 e a que pôs termo um golpe militar em 1926 sucedendo-se uma longa ditadura de 48 anos!!!... até ao 25 de Abril de 1974. A obra da Primeira República no que respeita a instrução justificaria, só por si, a mudança de regime político que teve lugar a 5 de Outubro de 1910, pois como se viu, se as coisas nem sempre foram como são hoje em matéria de instrução, a grande mudança deu-se precisamente na Primeira República; embora hoje nos possa parecer que a instrução do Povo foi um dado sempre adquirido e garantido para todo o sempre! Mas não é bem assim!! Porém, apesar dos progressos, a instrução dos Portugueses é ainda insuficiente!! Há que melhorá-la, há que estar vigilante, compreender e agir!!!

Bento de Jesus Caraça – que morreu em 1948, apenas com 47 anos – só conheceu portanto um Portugal sem liberdade, essa liberdade que, conquistada no 25 de Abril de 1974 nos parece ter sido adquirida para sempre! Mas não é bem assim!! Também com relação à liberdade há que melhorá-la, há que estar vigilante, compreender e agir!!!

Bento de Jesus Caraça deu um contributo importante para melhorar Portugal – lutando pela instrução e pela liberdade – e de entre os jovens de hoje alguns haverá que aperfeiçoarão uma e outra, inspirando-se quiçá no exemplo do jovem Bento de Jesus Caraça que quis "compreender e viver o seu tempo"[1] condição indispensável para poder melhorar os tempos futuros.

1. Um jovem no Portugal do seu tempo

Bento de Jesus Caraça foi um matemático, um cientista portanto, e como tal bem sabia que a liberdade irrestrita de pensamento, a liberdade de poder sistematicamente tudo pôr em questão – ou seja de tudo poder discutir – constituiu um dos pilares da ciência moderna, ou seja da ciência que se desenvolveu na Europa desde os tempos de Galileu (que nasceu em 1564 e morreu em 1642) até aos nossos dias e cuja prática tem vindo a ser adoptada em todo o mundo.

O valor da obra de divulgação da matemática encetada por Bento de Jesus Caraça cformaracteriza-se por um "vulgarização que *não abaixa nem deturpa*, que traz ao nível do *homem comum o património cultural comum*", e o seu livro *Conceitos Fundamentais da Matemática* é ainda hoje uma obra notável, insuperada entre nós, felizmente reeditada e actualizada há poucos anos atrás. A marca do homem de cultura está ali sempre presente como em todos os seus escritos não matemáticos, coligidos numa obra intitulada *Conferências e Outros Escritos.*

[1] Todas as citações entre aspas são retiradas de escritos de Bento de Jesus Caraça

São curiosas as relações entre a matemática e a liberdade: não exige a actividade matemática uma sujeição voluntária a regras implacavelmente rígidas? Como entender então a afirmação do grande matemático Georg Cantor para quem "a essência da matemática é a liberdade"? Para muitos as relações entre "Matemática e Liberdade" parecem equívocas, mas afinal são-no tanto como as relações entre "Lei e Liberdade", idealmente inseparáveis uma da outra.

Bento de Jesus Caraça foi um homem culto, num sentido preciso, que explicitou num ensaio intitulado *A cultura integral do indivíduo – problema central do nosso tempo*, ensaio justamente célebre e actual, que como todos os textos clássicos, tem sempre uma palavra a dizer mesmo depois de muitas releituras, e nesse ensaio questiona e responde:

"O que é um homem culto? É aquele que:

1º - Tem consciência da sua posição no cosmos e, em particular, na sociedade a que pertence;

2º - Tem consciência da sua personalidade e da dignidade que é inerente à existência como ser humano;

3º - Faz do aperfeiçoamento do seu ser interior a preocupação máxima e o fim último da sua vida."

Cultura e liberdade eram par Bento de Jesus Caraça coisas indissociáveis pois para ele "sem cultura não pode haver liberdade e sem liberdade não pode haver cultura", obrigando mesmo a afirmar que "a aquisição de cultura[...] significa, numa palavra, a *conquista da liberdade*".

Em vida de Bento de Jesus Caraça havia em Portugal um clima de medo generalizado em que se por um lado o Estado aterrorizava os cidadãos, por outro vivia no terrível temor de eles se libertarem. Ao carácter libertador da ciência, convite a pensar e que vive da correcção constante dos seus erros, não poderia alhear-se o regime ditatorial, obviamente ameaçado pela cultura e pela liberdade. As sucessivas vagas de demissões compulsivas e a proibição de investigar ou de ensinar endereçada a alguns dos nossos melhores valores científicos – um dos demitidos sendo o próprio Bento de Jesus Caraça – se bem reflecte o medo geral, deixa imaginar quer o isolamento intelectual a que eram votados os portugueses, quer a corrupção das regras derivada da imitação do poder vigente.

Hoje Portugal tem a liberdade por que Bento de Jesus Caraça denodadamente lutou e todos os matemáticos da geração presente sabem ou deveriam saber o quanto devem à acção pedagógica e cívica de Bento de Jesus Caraça, dívida essa que, por demasiado grande, não é facilmente saldável, tantas foram as suas iniciativas no sentido de responsabilizar e dignificar os matemáticos; nessa tarefa foi coadjuvado e seguido por muitos, não podendo nós deixar de mencionar António Aniceto Monteiro (outro demitido) conduzindo o meio matemático português à arena internacional.

Hoje Portugal está integrado no mundo, como o esteve há cinco séculos e as novas condições de liberdade duradoura e de circulação das ideias não poderão mais justificar a nossa indigência científica, permitindo-nos isso sim superar o nosso atraso, se cuidarmos autenticamente da formação científica e humanística dos nossos professores, fazendo da escola um local de prestígio, ambicionado, onde a sociedade veja realmente utilidade. Aprendemos sem receio com os nossos erros – "se não receio o erro, é só porque estou sempre disposto a corrigi-lo", disse Caraça – e desconfiemos das nossa certezas ou das certezas dos outros, única forma de acreditar em nós. Substitua-se nas nossas escolas a fé no milagre e o culto da eficácia militante, pelo ensino experimenta e a experiência da razão. Correremos o risco de perder uma grande ocasião, se não atendermos às palavras certeiras, em entrevista, do ilustre historiador Vitorino Magalhães Godinho:

Nós temos de criar uma comunidade científica que neste país insufle uma mentalidade racionalista, sem peias, uma atitude crítica, científica, problematizadora, ao mesmo tempo assente na demonstração e na prova experimental, que não vá atrás de suposições de tipo mágico ou formas de pensamento arcaizantes mas que aceite tudo aquilo que há na ciência moderna. A ciência nada tem a ver com dogmatismos, porque é perfeitamente aberta, é problematizadora, fundamentalmente, e não dogmática. Ora bem, nós temos que criar essa mentalidade, o que não quer dizer que assim esqueçamos o desenvolvimento das artes plásticas ou da música, ou da literatura, ou das formas de desporto. Tudo isto está entrelaçado no legado europeu: precisamente a Europa que queremos construir, ela parte, tem como valores essenciais esse sentido artístico e lúdico, a busca da beleza, mas também a busca do rigor, a capacidade de problematizar, mas também a busca da demonstração e o exame crítico cerrado, severo, de tudo quanto nos é proposto e de quanto nós propomos.

Temos de ter essa mentalidade aberta que, por um lado, se traduz num conjunto de actividades físicas de realização do homem na plenitude e na saúde, e, por outro, no conjunto das actividades de fabricar com tecnologia inovadora e preservadora e de pensar racionalmente...

É na lucidez, nas ideias claras e distintas, na grande tradição helénica e galileana-cartesiana, que vem a desembocar em Sérgio, em tantos outros, que nós devemos realmente situarmos; e não nas fantasias descabidas que nos vão ensandecer nos quintos impérios das missões providenciais, nos mitos; sejam eles o mito da economia de mercado, ou da privatização, ou da livre concorrência, ou outros mitos explicativos *do universo e certas formas de cultura que não têm o rigor, a precisão, o espírito matemático e experimental que, juntamente com o espírito artístico, como mostrou e tanto sublinhou Henri Poincaré, e não só, estão na base da nossa civilização – uma civilização que usufrui do raro privilégio de ser capaz de pôr-se em causa a si própria e arranca novas forças de renovação da insatisfação que sente com o que realizou.*

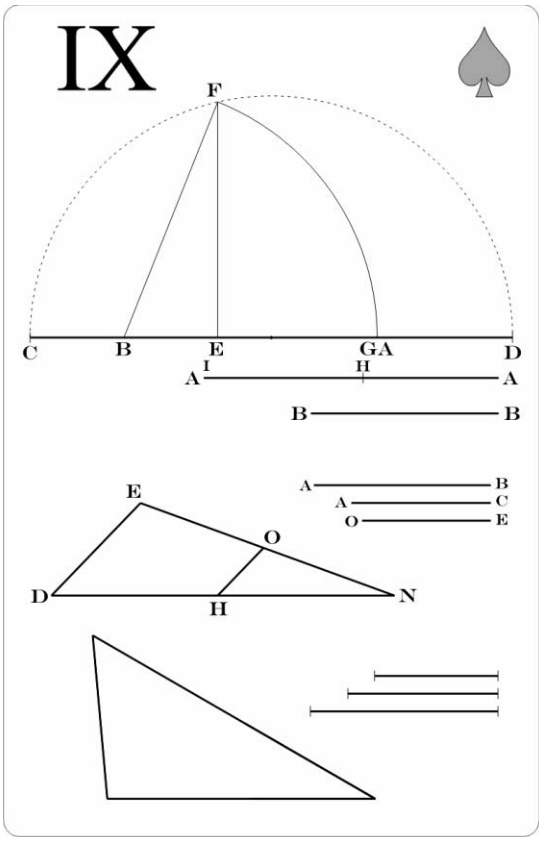
Sítios na Internet alusivos a Bento de Jesus Caraça:

http://www.epbjc-porto.net/bjc/vida.html
www.vidaslusofonas.pt/bento_j_caraca.htm
www.cgtp/bjc/biografia/biografia.htm
www.pcp.pt/publica/militant/253/p30.html
www.instituto-camoes.pt/cvc/ciencia/p19.html
www.fundacao-mario-soares.pt/iniciativas/ilustra_iniciativas/pdfs/docsbjc.pdf
www.mat.uc.pt/~gazeta/

O BARALHO PEDAGÓGICO DE DESCARTES

Marisa Ferreira

Nove de espadas



No Nove de Espadas, Descartes expõe duas novas *Proposições*, dando seguimento às duas últimas cartas, com novas razões proporcionais:

Proposição IV: *De uma linha reta dada cortar uma parte, que será meio proporcional entre o resto e outra linha reta dada.*

Proposição V: *Dadas duas linhas retas encontrar uma terceira proporcional.*

PARADOXOS

Mais dois paradoxos

Cristina Silva
Helder Pinto
Susana Rodrigues

PARADOXO DE CANTOR

Ainda dentro dos paradoxos que surgiram associados à evolução da teoria de conjuntos, é muitas vezes referido o *paradoxo de Cantor* que assenta na consideração de um conjunto de todos os conjuntos. Como em outros paradoxos, o principal problema reside na "infinidade demasiado grande" de elementos a serem considerados.

Suponhamos então a existência de

o conjunto de todos os conjuntos,

que designaremos por A, e atentemos no conjunto B constituído pelos elementos de A que não pertencem a si próprios, isto é, $B = \ x \in A : \ x \notin x \ $. Note-se que este conjunto B é diferente do conjunto de Russell, pois parte de um universo base (os elementos de um conjunto A), estando por isso bem definido – axioma da especificação da axiomática de Zermelo-Frankel. Este axioma garante-nos a existência do conjunto formado pelos elementos de um outro conjunto dado que satisfazem uma determinada propriedade. Ora, agora o prosseguimento do raciocínio é análogo ao do paradoxo de Russell. Se B pertence a si próprio então B não pertence a B (por definição de B). Por outro lado, se B não pertence a si próprio, como (por definição de A) B pertence a A, vem que B pertence a B (por definição de B). Logo, temos $B \in B$ se e só se $B \notin B$. Absurdo!

Uma vez que B é um conjunto bem definido, o absurdo resultou de termos suposto a existência de A (conjunto de todos os conjuntos). Logo tal conjunto não existe, isto é, à semelhança do paradoxo de Russell, a condição apresentada por si só não define um conjunto.

Uma outra forma de conduzir o raciocínio até chegar a uma contradição, tem por base as partes de A, ou seja, o conjunto $\mathcal{P}(A)$ constituído por todos os subconjuntos de A. Este conjunto também está bem definido, pelo axioma da potência da axiomática de Zermelo-Frankel que garante precisamente a existência do conjunto cujos elementos são os subconjuntos de um conjunto dado.

Consideremos, então, para cada elemento x de $\mathcal{P}(A)$ o conjunto x e seja H o conjunto dos elementos desta forma, isto é, $H = \quad x \; : x \in \mathcal{P}(A)$.

Podemos então definir a bijecção $\begin{array}{rcl} g : \mathcal{P}(A) & \rightarrow & H \\ x & \mapsto & x \end{array}$. No entanto, temos que $x \in A$ porque A é o conjunto de todos os conjuntos. Logo, H é um subconjunto de A, ou seja, g é uma bijecção entre $\mathcal{P}(A)$ e um subconjunto de A. Mas, mostra-se que tal bijecção não pode existir, pois $\mathcal{P}(A)$ é "maior" que A, precisamente no sentido em que não está em bijecção com qualquer dos seus subconjuntos.

PARADOXO DA MÃE, DA CRIANÇA E DO TIGRE

Muitos paradoxos são apresentados sob a forma de uma história, quase em jeito de conto infantil. A linguagem é bastante acessível e o contexto muito simples, tornando-os perceptíveis à maior parte das pessoas. Toda esta simplicidade faz com que este tipo de paradoxos seja capaz de despertar o interesse de muitos que se dispõem a analisá-los descontraidamente, sem sequer se aperceberem dos raciocínios matemáticos que estão a desenvolver. O paradoxo agora apresentado enquadra-se perfeitamente neste contexto:

> *Um tigre captura uma criança à sua mãe. Esta implora ao tigre que lhe devolva o filho, ao que o tigre responde:*
>
> *– Fá-lo-ei se fores capaz de prever correctamente o destino do teu filho (se o comerei ou to devolverei são e salvo).*
>
> *A mãe afirma, então:*
>
> *– Tu vais comer o meu filho.*
>
> *Pergunta-se: qual o destino da criança?*

A análise deste paradoxo passa então por tentar responder à pergunta "qual o destino da criança?". Temos apenas duas hipóteses mutuamente exclusivas: ou o tigre come a criança ou não (devolvendo-a sã e salva à sua mãe). Supondo que o tigre come a criança, então a mulher havia previsto correctamente o destino do seu filho, pelo que a criança deve ser devolvida sã e salva. Ou seja, se o tigre come a criança então não a pode comer. Por outro lado, supondo que o tigre não come a criança, então a mulher não havia sido capaz de prever o destino do filho, pelo que o tigre deve comer a criança. Ou seja, se o tigre não come a criança então deve comê-la. Temos assim a auto-contradição: o tigre come a criança se e só se não a come! Absurdo!

Após esta análise podemos, então, concluir que a co-existência destas duas afirmações conduz a resultados contraditórios, impossíveis de acontecerem em simultâneo. Ou seja, as duas afirmações, que à primeira vista não parecem levantar quaisquer problemas, quando conjugadas impossibilitam a determinação da sua veracidade. Assim, se o tigre da "história" quiser realmente cumprir o que disse ainda está neste momento a tentar decidir, infrutiferamente, se come ou liberta a criança, que se tornará homem e envelhecerá sempre à espera de ser libertado!...

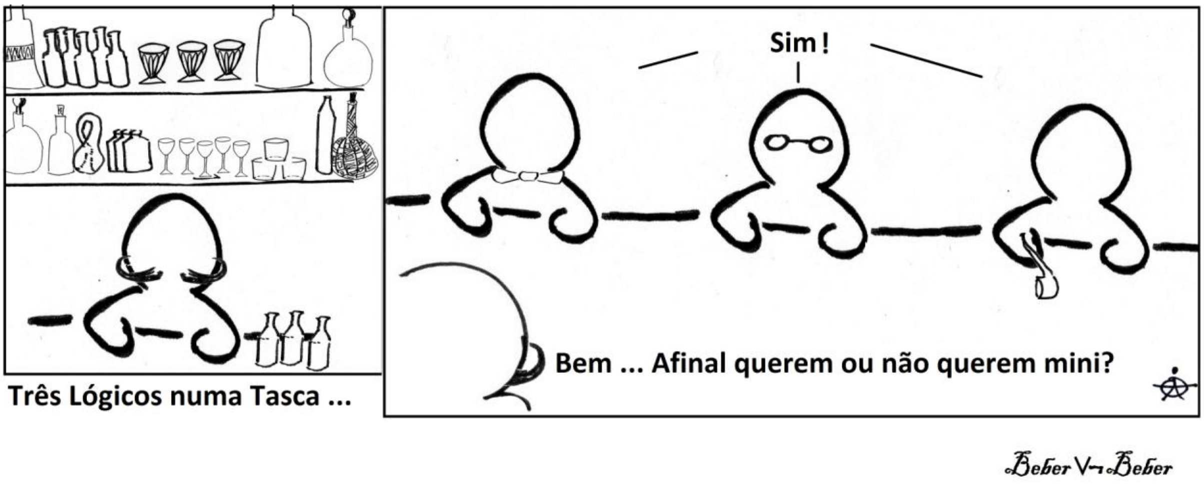
Uma breve análise formal e simbólica deste paradoxo evidencia a contradição de forma clara. Representemos por L a afirmação "o tigre liberta a criança" e sejam φ_t e φ_m as representações das afirmações do tigre e da mãe, respectivamente. Temos que φ_t: $L \leftrightarrow \varphi_m$ pois o tigre liberta a criança se e só se a afirmação da mãe for verdadeira e φ_m: $\sim L$ pois a mãe diz que o tigre não liberta o seu filho. Ora, rapidamente se conclui que o conjunto $\Sigma=\{ \varphi_t , \varphi_m \}$ não é realizável, isto é, não existe valor lógico da variável L que torne verdadeiras ambas as afirmações (pois esta definição de φ_m torna φ_t sempre falsa):

L	$\varphi_m : \sim L$	$\varphi_t : L \leftrightarrow \varphi_m$
v	***f***	***f***
f	***v***	***f***

Do facto de Σ não ser realizável (ou equivalentemente, ser inconsistente) podemos concluir que de Σ podem ser deduzidas quaisquer afirmações, nomeadamente L e $\sim L$.

Voltando à "história", se o tigre tiver os conhecimentos lógicos aprofundados, e uma vez que é ele quem tem o poder de decisão, afinal pode fazer o que quiser. Isto porque, apesar de não cumprir o que disse, pois a sua afirmação é falsa de qualquer modo, a inconsistência do contexto valida-lhe qualquer opção. Note-se que neste caso o poder de decisão é determinante para o desfecho da história, pois, se o poder de decisão pertencesse à mãe, tendo por base um raciocínio idêntico, ela poderia também fazer o que quisesse.

Uma outra situação que tem por base a criação de um contexto inconsistente é a apresentada no sofisma de Protágoras (que analisaremos a seguir), mas nesse caso não é evidente de que lado está o poder de decisão, criando-se, portanto, um impasse.



Composição e Decomposição de Figuras Planas

Carlos Pereira dos Santos

A par de tarefas envolvendo medições, a prática de composição e decomposição de figuras planas constitui uma das actividades mais importantes nos primeiros passos que uma criança dá na Geometria.

Em tarefas de composição livre, que já podem ser executadas no Jardim-de-Infância, as crianças são convidadas a construir várias formas diferentes a partir de um certo conjunto de peças (veja-se a título de exemplo a figura seguinte retirada de um manual de Singapura).

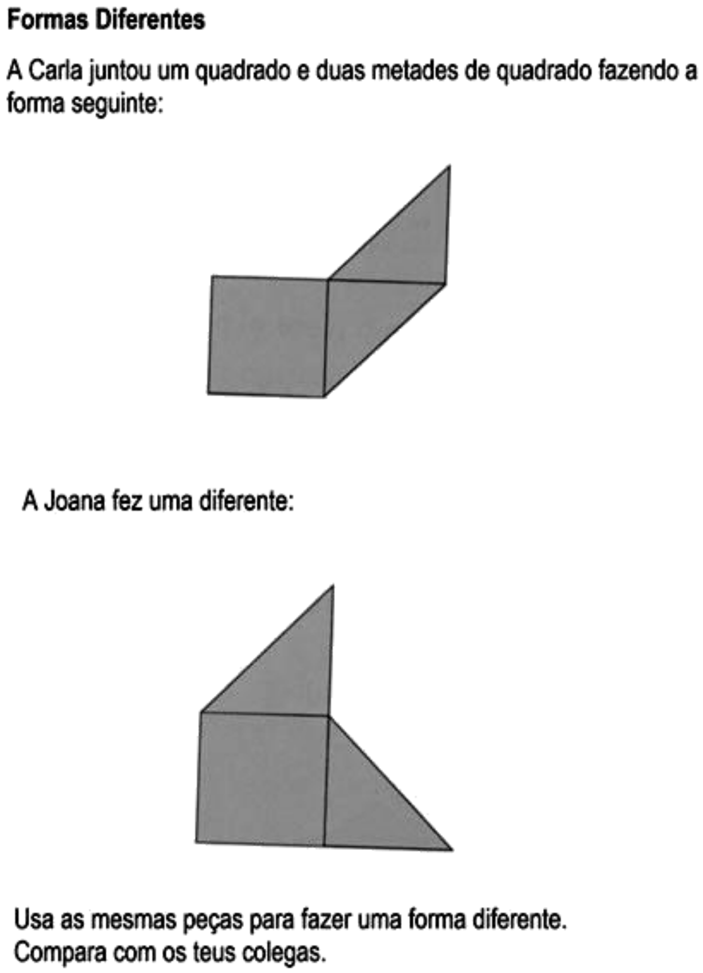


Figura 1: Composição livre.

Pais, educadores e professores devem ter presentes dois princípios importantes a ser transmitidos:

1 - **Com as mesmas peças é possível obter um grande número de formas.** Ou seja, a «essência» da forma de uma figura não é a quantidade de superfície ocupada (veremos noutro artigo qual é a «essência» da forma). Com experimentação, as crianças podem intuir este facto facilmente. Com as mesmas peças, o que é **invariante** é precisamente a área ocupada pelas peças usadas. A forma pode mudar.

2 - O que faz duas figuras serem diferentes é o facto de **não as conseguirmos colocar uma sobre a outra de forma a elas coincidirem**. Se tal fosse possível, as figuras seriam **geometricamente iguais ou congruentes**. Dizem-se congruentes em vez de iguais uma vez que na realidade são duas figuras distintas, tendo a mesma forma e tamanho. Correndo o risco de alguns puristas deixarem de ler o livro neste momento, não parece mal dizer às crianças pequenas que *são iguais*. É um termo que elas conhecem: mesmo alguns matemáticos o utilizam em vez de dizer *são congruentes*. Que se insista na experiência que consiste em sobrepor peças umas sobre as outras. Isso sim, é mesmo importante.

Em geometria, os objectos elementares **são idealizados por nós**. Quando falamos de uma linha, idealizamos algo sem espessura. Quando falamos de um ponto, imaginamos algo sem comprimento nem espessura. Os objectos da vida real podem ser quadrangulares, triangulares, etc., mas não são exactamente os quadrados e triângulos idealizados pelos geómetras: essas idealizações são abstractas.

As crianças podem e devem manusear objectos concretos experimentando conceitos geométricos importantes. Nada melhor para apreender o conceito de congruência do que sobrepor um quadrado de plástico sobre outro do mesmo tamanho (mesmo sabendo que na vida real a sobreposição nunca é absolutamente exacta). Os objectos podem até servir para experimentar algumas noções fundamentais:

1 - Se um quadrado azul se pode justapor sobre um quadrado vermelho então é claro que o contrário também é verdade, o quadrado vermelho pode justapor-se sobre o quadrado azul. Em linguagem matemática diz-se que a relação de congruência é simétrica. Quase não é necessário dizer nada sobre isto às crianças uma vez que quase todas elas sabem que isso acontece (se a peça de lego azul se encaixa exactamente sobre a roxa, é claro que o contrário também acontece).

2 - Se um quadrado azul se pode sobrepor a um quadrado vermelho e se esse mesmo quadrado vermelho se pode sobrepor a um quadrado verde então o quadrado azul também se pode sobrepor ao quadrado verde. Em linguagem matemática diz-se que a relação de congruência é transitiva. Esta propriedade já pode não ser evidente para algumas crianças. Mas não parece mal incentivá-las a experimentar. A compreensão desta propriedade vai servir mais tarde para fazer medições indirectas.

3 - Existe uma propriedade da relação de congruência que, embora sendo totalmente lógica, não se pode experimentar com objectos. Qualquer objecto de pode justapor a si mesmo. Isto não se experimenta; os matemáticos chamam-lhe propriedade reflexiva.

Na fase em que as crianças fazem composições livres com um certo número de peças (é parecido com o acto de fazer desenhos) a tónica devem ser sobre estes dois assuntos: com as mesmas peças podemos ter uma multiplicidade de formas e experimentação da justaposição.

As tarefas de decomposição são, como o nome indica, o processo inverso da composição. Neste tipo de tarefa, a figura final já é dada. O objectivo é tentar justapor um conjunto de peças sobre a figura dada. As peças terão de coincidir exactamente: trata-se de uma espécie de *puzzle*. O que se está a fazer é a decompor a figura alvo em figuras mais simples.

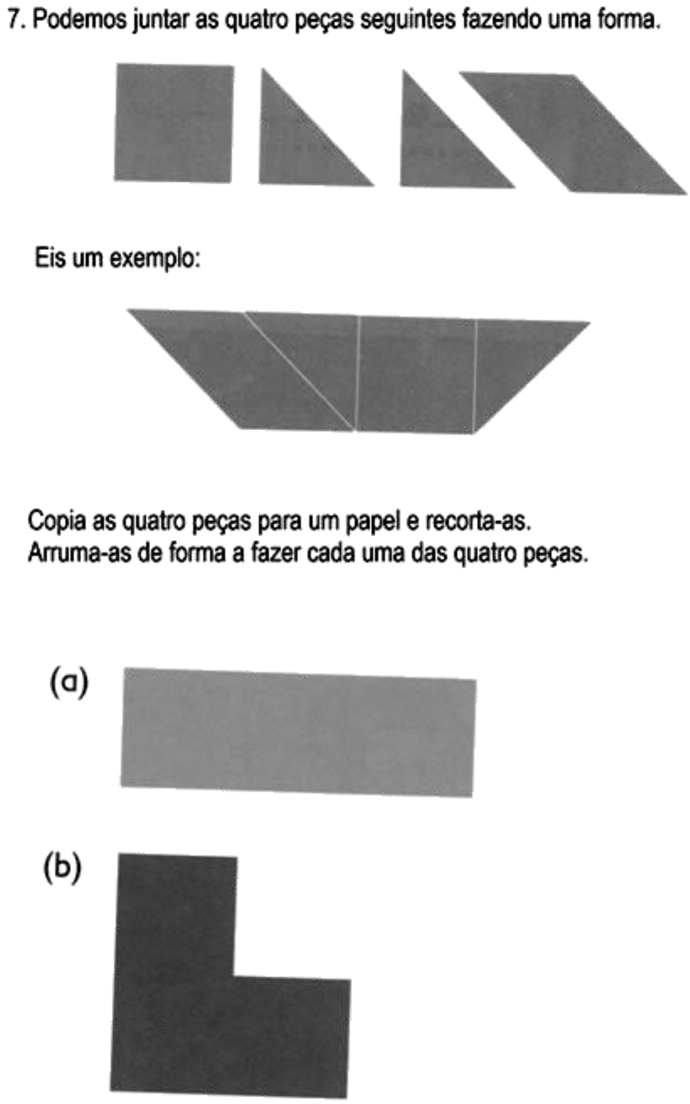


Figura 2: Tarefa de decomposição.

Numa primeira fase, as tarefas de decomposição são apresentadas como um jogo, desligadas ainda da noção de área. As crianças deverão ser persistentes tentando resolver os problemas propostos (como é claro, pais, educadores e professores podem ir aumentando gradualmente o grau de dificuldade). As decomposições podem ser trabalhadas logo a partir do pré-escolar.

Materiais como tangrans ou geoplanos podem servir o propósito. Tarefas de coloração também parecem ser muito adequadas (ver figura 3).

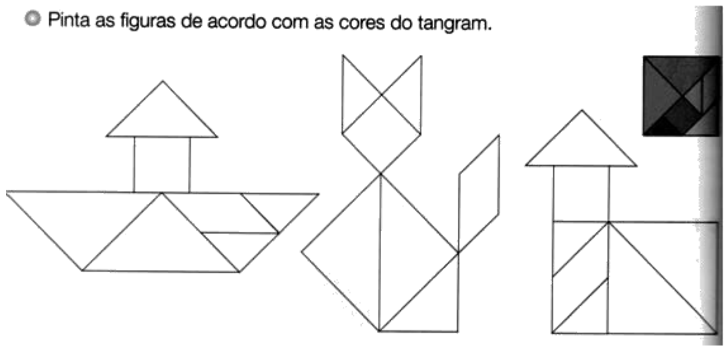


Figura 3: Tarefa de coloração.

Para ir aumentando ainda mais o grau de dificuldade das tarefas, pode não explicitar-se as peças em causa na decomposição. Por exemplo, pode dar-se um saco de peças a uma criança e uma figura alvo construída com algumas das peças do saco. A criança não saberá à partida quais são. Por vezes, estas actividades originam interessantes raciocínios por exclusão de partes (algo do tipo, este quadrado e este rectângulo não podem ser utilizados em simultâneo por ultrapassarem o tamanho da figura).

A certa altura, as tarefas de decomposição começam a ser essenciais para trabalhar as noções de medição de área e de unidade de área. Antes de iniciar esta fase, deve trabalhar-se o raciocínio multiplicativo associado às arrumações rectangulares.

(continua)

Índice