Ano 27º Lisboa, Novembro 2011 Nº 294

Jornal de Mathemática Elementar

Endereço de Email PUBLICAÇÃO TRIMENSAL

jme@spm.pt

Director Honorário: Sérgio Macias Marques

Director: Jorge Nuno Silva **Preço:** ***1,80€*** **(IVA incluído)**

Aqui têm os nossos leitores o penúltimo número do ano, com contribuições de novos autores.

A equipa reforça-se e cresce, mas nunca atinge a dimensão que pretendemos...

Esperamos mais contribuições dos nossos leitores.

Jorge Nuno Silva

FICHA TÉCNICA

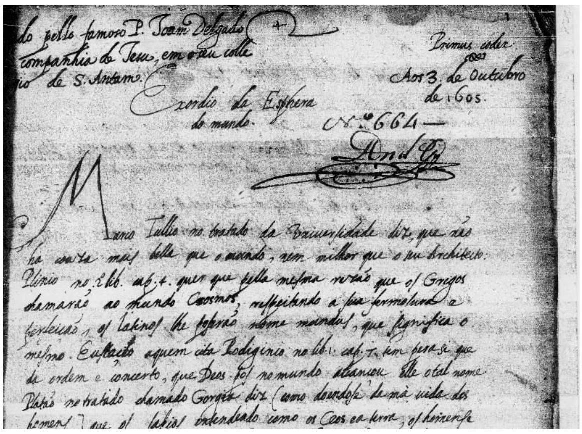
Registo nº 110029-ISSN 1646-978X
Nº Contribuinte 501065792
Impressão Repro 2000
Tiragem 1000 exemplares
Redacção e Administração
SPM. Av. da República, 45-3º
1050-187 Lisboa
Tel. 217 939 785

Galeria de Matemáticos

Bernardo Mota

João Delgado

1553 – 1612


Primus codex
Aos 3 de Outubro de 605
Exordio da Esphera do mundo
Nº 664

Início do curso de João Delgado de 1605/6 sobre Teóricas dos Planetas (a partir do manuscrito 664 da Biblioteca Pública Municipal do Porto).

Tornou-se Jesuíta por volta de 1574. Entre 1576 e 1585 estudou Teologia em Roma; aí cursou também Matemática na célebre "Academia de Matemática" do Colégio Romano, tendo sido aluno do próprio Cristóvão Clávio, apesar de o seu nome não vir referenciado nos catálogos de alunos do Colégio Romano que ainda subsistem. Voltou a Portugal com o intuito de seguir para o Brasil, mas a viagem acabou por não se concretizar. Não se pode excluir a hipótese de ter ensinado matemática em Portugal logo após o seu regresso de Itália, nos anos de 1584 ou 1585, mas com certeza, apenas se pode afirmar que leccionou matemática entre 1586 e 1589 em Coimbra, em cursos privados. Nos anos 1589-1590 exerceu em Évora as tarefas de Padre e confessor, mas sem funções docentes atribuídas; no mesmo ano de 1590 fundou a primeira cátedra de matemática num colégio Jesuíta em Portugal, o de Santo Antão, em Lisboa. Aí ensinou a disciplina até à sua morte e formou um pequeno grupo de matemáticos, muitos dos quais acabaram por leccionar na própria instituição. A sua actividade docente, no entanto, não foi contínua, mas sofreu diversas interrupções, também devido ao facto de lhe caber o cargo de arquitecto para toda a toda a província Lusitana. Nessa qualidade dirigiu diversas obras, entre as quais as de Santo Antão-o-Novo, as do Noviciado da Cotovia e as do Colégio das Artes. Durante as suas ausências, o ensino da matemática em Santo Antão foi assegurado normalmente pelo seu assistente Francisco da Costa.

Dos cerca de vinte e cinco anos que leccionou, apenas conhecemos o conteúdo de parte do curso de 1605/6, com ênfase em temas de Astronomia e Esfera e do ano imediatamente seguinte (1606/7), que se concentrou em temas de Astrologia Prática ou Judiciária. Do primeiro existem dois manuscritos (Lisboa, Biblioteca da Academia de Ciências, Cod. 491 V; Porto, Biblioteca Pública Municipal, Cod. 664); um terceiro manuscrito, pertencente a um coleccionador privado, parece possuir o mesmo conteúdo, mas corresponde antes a um curso leccionado no ano de 1598. O segundo dos cursos referidos sobrevive em três manuscritos (Lisboa, Biblioteca Nacional, Cods. 2130 e 6353; Madrid, Biblioteca Nacional de Espanha, Cod. 8931). Existe, além destes, outro manuscrito intitulado *Explanationes in Sphaeram Ioannis de Sacrobosco* que apresenta o nome do autor ilegível, mas contém lições ditadas em Coimbra em 1587 (Coimbra, Biblioteca Geral da Universidade, Cod. 1184); como nesta data não havia docente de matemática na Universidade de Coimbra e João Delgado já ensinava no Colégio da cidade, o curso chegou a ser-lhe atribuído; no entanto, nos colégios portugueses de então era prática comum os próprios professores de filosofia leccionarem algumas lições de esfera elementar, não sendo este um exclusivo dos professores de matemática. Sabe-se que João Delgado tencionava compor um curso de matemática para ser lido em três anos, pois em 1606 chegou ao Geral Cláudio Acquaviva, em Roma, um pedido de assistente que o pudesse ajudar nesse trabalho. A versão final deste manual deveria ser enviada para Roma a fim de receber a opinião de Clávio, mas o texto não chegou a ser publicado e talvez nunca tenha chegado a ser escrito. Também se formulou a hipótese de haver uma correspondência regular com Clávio; mas, apesar de provável, nenhum documento atesta esta suposição. Os cursos de João Delgado não são apenas interessantes pelo conteúdo matemático. O curso de teórica dos planetas abria com um prólogo sobre temas de epistemologia da matemática, que adquiriram grande relevância nos séculos XVI e XVII. Nisto Delgado parece ter sido um pioneiro: foi um dos primeiros formandos da Academia de Clávio a empreender um tratamento tão cuidado do tema e o primeiro a fazê-lo em língua portuguesa (embora em Portugal o tema já tivesse surgido anteriormente em aulas de filosofia, leccionadas em Latim).

Bibliografia:

Luís de Albuquerque, **A «Aula de Esfera» do colégio de Santo Antão no século XVII (**Coimbra: Agrupamento de Estudos de Cartografia/Junta de Investigações do Ultramar, 1972). [Um estudo pioneiro e, por isso, necessariamente datado e marcado por pequenas imprecisões].

ARSI, *Lusitania* 39 e 44 [Catálogos de 1586-1611].

Ugo Baldini, "As Assistências Ibéricas da Companhia de Jesus e a actividade científica nas missões asiáticas (1578-1640). Alguns aspectos culturais e institucionais", **Revista Portuguesa de Filosofia, LIV.2** (1998) 95-246. [Os artigos de Baldini, este e os seguintes, são fundamentais, apesar de repetitivos no que toca a Delgado; neste, a informação encontra-se na p. 229 n. 94.]

Ugo Baldini, "The Portuguese Assistancy of the Society of Jesus and Scientific Activities in its Asian Missions until 1640", in: ***História das Ciências Matemáticas - Portugal e o Oriente / History of Mathematical Sciences - Portugal and East Asia*** (Lisboa: Fundação Oriente, 2000), pp. 49-104 [Delgado aparece nas p. 57-58 e 74.]

Ugo Baldini, "L'insegnamento della matematica nel Collegio di S. Antão a Lisbona, 1590-1640)", in: **A Companhia de Jesus e a Missionação no Oriente. Actas do Colóquio Internacional promovido pela Fundação Oriente e pela Revista Brotéria. Lisboa, 21 a 23 de Abril de 1997** (Lisboa: Fundação Oriente, 2000), pp. 275-310. [Sobretudo a p. 281, n. 20]

Ugo Baldini, “The Academy of Mathematics of the Collegio Romano from 1553 to 1612”, in: ***Jesuit Science and the Republic of Letters*** (Cambridge: MIT Press, 2003), pp. 47-98. [Sobretudo a p. 91, n. 87.]

Luís Miguel Carolino, “João Delgado SJ e a «Quaestio de Certitudine Mathematicarum» em inícios do século XVII”, ***Revista Brasileira de História da Matemática,*** **v. 6, nº 11** (2006) 17-49. [Sobre o pensamento metamatemático de João Delgado; contém uma edição do capítulo proemial do curso de teóricas dos planetas no final].

Lisboa, Biblioteca Nacional, COD. 1664. [Trata-se de uma famosa sinopse de Franco: *Annalium societatis Iesu in Lusitana prouincia a suis initiis ad nostra tempora summula chronologica a P. Antonio Franco eiusdem societatis iesu*; João Delgado aparece referido na f. 204].

Francisco Gomes Teixeira, **História das Matemáticas em Portugal** (Coimbra: 1934). [Apenas um breve e esquemático apontamento sobre Delgado.]

Rodolfo Guimarães, **Les Mathématiques en Portugal** (Coimbra: Imprensa da Universidade, 1909). [Contém um breve apontamento sobre Delgado na p. 29].

Henrique Leitão, “Appendix C: Scientific manuscripts from the S. Antão college”, in: ***The practice of mathematics in Portugal.*** *Papers from the International meeting held at Óbidos, 16-18 November 2000* (Coimbra: Imprensa da Universidade, 2004), pp. 745-758. [Um catálogo onde surgem os manuscritos atribuídos a Delgado]

Henrique Leitão, ***Sphaera Mundi: A Ciência na Aula de Esfera. Manuscritos Científicos do Colégio de Santo Antão nas Colecções da BNP*** (Lisboa: BNP, 2008). [Biografia de Delgado na p. 103; descrição dos manuscritos nas pp. 105-108.]

Bernardo Mota, “The Influence of Cristopher Clavius in Portugal: João Delgado on the Status of Mathematical Demonstrations”, in: ***Synergia: Primer encuentro de jóvenes investigadores en historia de la ciencia*** (Madrid: Consejo Superior de Investigaciones Científicas, 2007), pp. 413-429. [Sobre o pensamento metamatemático de João Delgado].

Bernardo Mota, ***O Estatuto da Matemática em Portugal nos Sécs. XVI e XVII*** (Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian e Fundação para a Ciência e Tecnologia, 2011). [O pensamento de João Delgado é descrito nas pp. 210-223.]

João Pereira Gomes, "Delgado (João)", in: ***Verbo, Enciclopédia Luso-Brasileira de Cultura*** – **Edição séc. XXI** (Lisboa: Editorial Verbo, 1999), *sub nomine*. [O artigo onde se lança a hipótese de Delgado ser o autor das lições contidas no Cod. 1184 da Biblioteca Geral da Universidade de Coimbra.]

Francisco Rodrigues, **A Formação Intellectual do Jesuita. Leis e Factos** (Porto: Livraria Magalhães e Moniz Editora, 1917). [Apontamento breve sobre Delgado na p. 284.]

Francisco Rodrigues, **História da Companhia de Jesus na Assistência de Portugal** (Porto: Livraria Apostolado da Imprensa, 1931-50). [Trata-se de uma obra clássica em quatro volumes; João Delgado aparece referido em: II 1, pp. 22, 209 n.3, 210; II 2, pp. 13 n. 1, 97-8; IV 1, pp. 403-4.]

Frederico Augusto Oom

(Lisboa, 4 de Dezembro de 1830 – Lisboa, 25 de Julho de 1890)

Pedro Raposo

(Continuação do número anterior)

<u>Obras de Frederico Augusto Oom</u>

«Vergleichung des Armag-Catalog von Robinson mit der Aboer von Argelander», Bulletin de l'Academie Impériale des Sciences de St.-Pétersburg, III (1862) 415-428.

«Observations», in Otto Struve (ed.), Observations de Pulkova, vol. III (St.-Pétersburg: Imprimerie de L'Academie Impériale des Sciences, 1870), pp. 139-199.

«Observations faites a l'instrument des passages établi dans le premier vertical», in Otto Struve (ed.), Observations de Pulkova, vol. III (St.-Pétersburg: Imprimerie de L'Academie Impériale des Sciences,), pp. 227-237.

«Aus einem Schreiben des Herrn Dr. F. A. Oom an den Herausgeber», Astronomische Nachrichten, 83 (1874) cols. 315-316

Considerações acerca da organização do Real Observatorio Astronómico de Lisboa (Lisboa: Imprensa Nacional, 1875).

«Observations méridiennes de la grande comète 1881 III», Astronomische Nachrichten 104 (1882) cols. 7-12.

Francisco da Ponte Horta, José Maria da Ponte Horta, Frederico Augusto Oom, Luiz Porfirio da Motta Pegado, «Parecer apresentado á Primeira Classe da Academia Real das Sciencias, ácerca de uma memoria do sr. Cypriano Jardim intitulada "Projecto de aerostato dirigivel", com um supplemento e additamento», Jornal de Sciencias Mathematicas, Physicas e Naturaes, XII, 48 (1888) 269-272.

Instruções sobre o emprego de um "universal" como instrumento de passagens (Lisboa: Imprensa Nacional, 1895).

Fontes biográficas secundárias

Pedro M. P. Raposo, «Polity, precision and the stellar heavens: the Royal Astronomical Observatory of Lisbon (1857-1910)», tese de doutoramento, University of Oxford, 2010.

pp. 13 n. 1, 97-8; IV 1, pp. 403-4.]

Problemas de Outros Tempos (5º)

Helder Pinto

O problema apresentado a seguir é retirado de um livro já apresentado anteriormente e é definido como sendo um problema de "recapitulação". Trata-se de um problema simples que na sua resolução envolve apenas operações aritméticas, bem como um conhecimento rudimentar de fracções.

Observe-se o longo preâmbulo ético e moral onde se valorizam as qualidades humanas deste estudante: "muito aplicado e um óptimo companheiro", para além de que "não é gastador". Este aluno será universitário quer pela capa que enverga, bem pelo facto de ser tratado pelo apelido ("Sampaio"). Repare-se ainda no traje formal e aprumado do livreiro, bem diferente do que acontece nos dias de hoje. Neste texto está ainda implícito a valorização dos livros como objectos de valor, uma vez que está subentendido que a compra destes objectos não é um gasto inútil.

Nesta secção do Jornal de Mathemática Elementar estamos a apresentar alguns problemas de matemática que foram publicados em livros escolares portugueses do passado. Como usual, contámos com a colaboração dos nossos leitores fazendo-nos chegar cópias de problemas antigos que considerem interessantes para o e-mail *hbmpinto1981@gmail.com*.

O Sampaio é um estudante muito aplicado e um óptimo campanheiro. Não é gastador e todo o dinheiro que lhe sobra das suas despesas emprega-o na compra de livros. Já tem uma belíssima biblioteca e continua a enriquecê-la.

Nas últimas edições anunciadas pelas casas editoras, figuram a História de Portugal e os Lusíadas, livros estes que ele muito gostava de possuir na sua estante.

Foi à Livraria Avelar Machado na esperançosa intenção de os adquirir, mas o dinheiro de que dispunha não lhe chegava para comprar os dois livros. Começou, então, a deitar as suas contas e chegou à seguinte conclusão:

— Se compro só a História, sobeja-me dinheiro; para comprar a História e os Lusíadas, como é meu desejo, falta-me um sexto do seu custo...

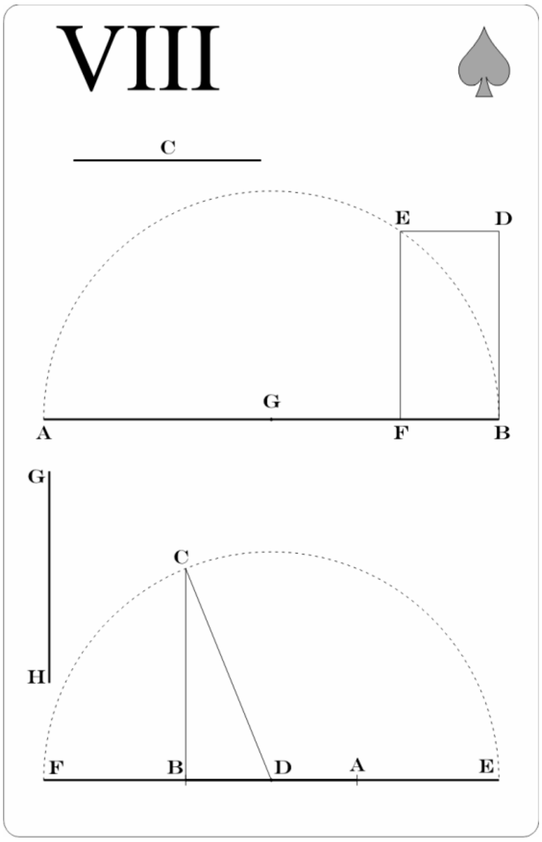
Que dinheiro possuía o Sampaio?

Gouveia, F. C., Ferreira, J. G., Júdice, F. A. S.; *1111 Problemas de Aritmética e Geometria (4.ª Classe)*; Emprêsa Contemporânea de Edições; Lisboa, s/a (2.ª edição); p. 76.

O BARALHO PEDAGÓGICO DE DESCARTES

Marisa Ferreira

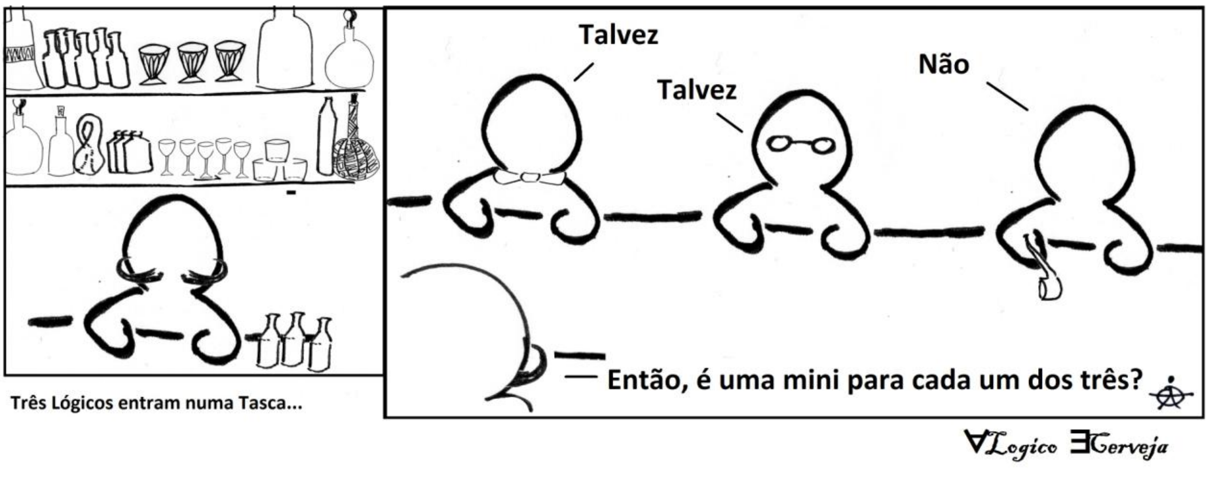
Oito de espadas



Descartes, no Oito de Espadas, apresenta-nos duas novas *Proposições*, do conjunto de *Proposições* iniciado na carta anterior, com algumas razões proporcionais:

Proposição II: *Dada a soma dos extremos e o meio proporcional, discernir os fins e os extremos.*

Proposição III: *Dado o meio proporcional e a diferença de dois extremos encontrar os extremos.*



(continua)

CLUBE DE MATEMÁTICA DE ESPINHO

Magia

1=2, o mágico matemático distraído.

O mágico matemático anuncia, com pompa e circunstância, que vai mostrar que 1=2.

- Meninos e meninas, vou mostrar, com ajuda da Matemática, que $1 = 2$.

- Partamos do pressuposto inicial que:

$$a = b$$
$$e$$
$$a \neq 0 \quad e \quad b \neq 0$$

- Vamos multiplicar por a ambos os membros da igualdade:

$$a.a = a.b$$

- Ou seja,

$$a^2 = a.b$$

- Vamos subtrair b^2 a ambos os membros da igualdade:

$$a^2 - b^2 = a.b - b^2$$
$$\Leftrightarrow \underbrace{(a+b).(a-b)}_{\text{Caso notável}} = \underbrace{b.(a-b)}_{\substack{\text{Propriedade} \\ \text{distributiva} \\ \text{da multiplicação}}}$$

- Vamos dividir por $a-b$ ambos os membros da igualdade:

$$\frac{(a+b).(\cancel{a-b})}{\cancel{a-b}} = \frac{b.(\cancel{a-b})}{\cancel{a-b}}$$

$$\Leftrightarrow a + b = b$$

- Mas como $a = b$, vamos obter:

$$2a = a$$

- Dividindo tudo por a obtemos:

$$2 = 1$$

Esta "demonstração" conseguiu convencer todos os meninos, excepto a Maria que descobriu logo qual foi o erro deste mágico.

E tu? Também és capaz de descobrir o erro?

ERRO:

- Vamos dividir por $a-b$ ambos os membros da igualdade:

$$\frac{(a+b).\cancel{(a-b)}}{\cancel{a-b}} = \frac{b.\cancel{(a-b)}}{\cancel{a-b}}$$

O mágico não pode dividir ambos os membros da igualdade por $a-b$ pois $a=b$, ou seja, $a-b=0$ (e, como tu já sabes, não se pode dividir um número por zero).

Porque não se pode dividir um número por zero?

Pensemos em primeiro lugar num caso particular, por exemplo, porque não se pode dividir 2 por 0?

Vamos supor que era possível. Então $\frac{2}{0} = x$ onde x é um número.

Então teríamos $2 = 0.x$, que é falso para qualquer valor de x.

Com um raciocínio idêntico a este, conclui-se que não se pode dividir nenhum número diferente de zero por zero.

E o zero? Porque não se pode dividir zero por zero?

Se tal fosse possível teríamos $\frac{0}{0} = x$, ou seja, $0 = 0.x$, que é verdadeiro para qualquer valor de x. Mas então x poderia ser um número qualquer, ou seja, $\frac{0}{0}$ poderia tomar mais do que um valor o que não pode acontecer.

Logo é impossível efectuar a divisão de um número por zero.

******

2. O mágico que adivinhava números.

O mágico pede ao António que lance dois dados, de modo a que o mágico não consiga saber qual o resultado, e que verifique quais são as faces que ficam viradas para cima.

Então o mágico propôs-se a adivinhar os números que saíram nos dados, pedindo ao António que fizesse as seguintes operações:

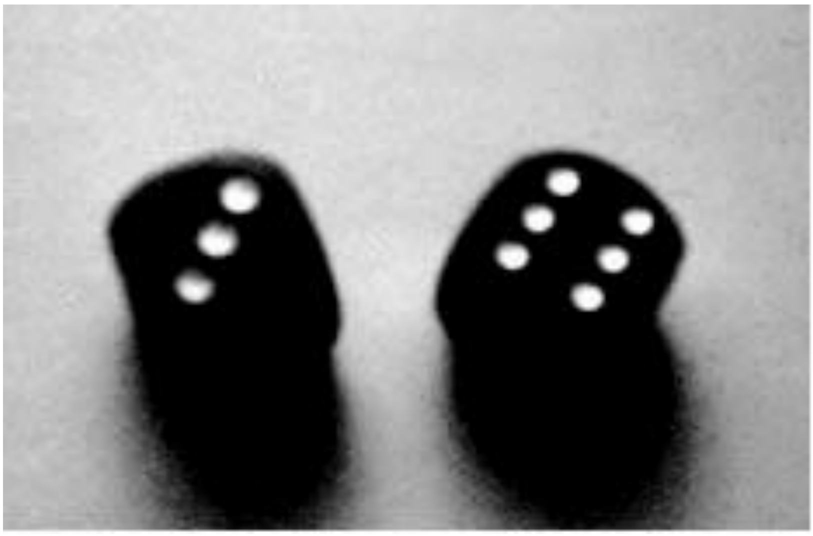
- Multiplica por dois o valor do primeiro dado;
- Soma cinco a este último número;
- Multiplica agora este valor por cinco;
- Finalmente, soma-lhe o número que saiu no outro dado.

Quanto deu? Perguntou o mágico.

Então o mágico subtraiu-lhe, mentalmente, 25 e os algarismos do número que resultou destas operações são os números que saíram nos dados.

Vamos ver um exemplo:

Considera o lançamento destes dois dados:



Então o n.º de pintas do primeiro dado é 3 e o n.º de pintas do segundo dado é 6.

Vamos fazer as contas que o mágico pede:

$$\begin{aligned}&2\times 3=6\\&6+5=11\\&11\times 5=55\\&55+6=61\end{aligned}$$

E agora façamos o cálculo mental do mágico:

$$61-25=36 \qquad \text{RESULTOU!!!}$$

Vamos então ver, matematicamente, o significado dos cálculos que o António e o mágico fizeram, para tentar justificar que esta magia resulta sempre:

Seja x o valor do primeiro dado e y o valor do segundo.

Então:

1º passo: $2x$

2º passo: $2x+5$

3º passo: $5(2x+5)$

4º passo: $5(2x+5)+y$

Mágico: $5(2x+5)+y-25$

Simplificando esta última expressão, temos que:

$$\begin{aligned}&5(2x+5)+y-25\\&10x+25+y-25\\&10x+y\end{aligned}$$

Ora, como x e y são números naturais menores ou iguais a 6, $10x+y$ vai ser um número de dois algarismos em que x é o algarismo das dezenas e y o algarismo das unidades (que era o que se pretendia).

Por exemplo, no caso anterior temos $x=3$ e $y=6$ e então:

$$\begin{aligned}10x+y&=10\times 3+6\\&=30+6\\&=36\end{aligned}$$

PARADOXOS

Dois paradoxos

Cristina Silva
Helder Pinto
Susana Rodrigues

Introdução

Quando nos propusemos a efectuar este trabalho, tínhamos como objectivo fazer o levantamento e a análise de alguns paradoxos.

Um dos primeiros problemas encontrados foi uma mesma situação ser um paradoxo para alguns autores enquanto que para outros não. Assim, para uniformizar e catalogar as situações encontradas, procurámos definir o conceito de paradoxo. E então, surgiu outro problema: qual a definição de paradoxo? Da pesquisa efectuada concluímos que a definição de paradoxo é muito variável de autor para autor, sendo muitas vezes confundida com a noção de falácia. Esta deve ser entendida como um raciocínio aparentemente válido, mas na realidade incorrecto. Quanto às definições de paradoxo dividimo-las, essencialmente, em dois grupos: uma noção mais superficial e intuitiva e outra mais rigorosa e científica.

A primeira baseia-se apenas no confronto entre as conclusões obtidas e as expectativas do senso comum.

"Proposição ou discurso oposto à opinião dominante ou à verosimilhança."
(Durozoi, 1987)

"Paradoxo significa algo contrário à opinião, isto é, algo que choca com as convicções e opiniões aceites."
(Alves, 1999)

No segundo grupo, na tentativa de colocar mais rigor matemático / lógico, surgem definições menos vagas, com menos arbitrariedade:

"Um paradoxo surge quando um conjunto de premissas aparentemente indisputáveis dá origem a conclusões inaceitáveis ou contraditórias. A resolução de um paradoxo implica mostrar que há um erro escondido nas premissas, ou que o raciocínio é incorrecto, ou que a conclusão aparentemente inaceitável pode, afinal, ser tolerada."

(Blackburn, 1994)

"Paradoxos lógicos são raciocínios em que, partindo de enunciados não contraditórios, se chega a conclusões contraditórias, isto é, tanto se pode demonstrar a veracidade como a falsidade de um juízo."

(Alves, 1999)

Da análise destes dois tipos de definição podemos concluir que o segundo é mais "exigente" que o primeiro. Mas mesmo neste tipo de definição aparecem expressões do tipo *premissas geralmente aceites* ou *raciocínios aparentemente válidos*, o que não se adequa ao rigor esperado da matemática. Vejamos um exemplo:

"E o que é afinal um paradoxo? Um paradoxo é um raciocínio que, tanto quanto conseguimos perceber, é válido e que, tanto quanto conseguimos perceber, parte de premissas verdadeiras, mas que no entanto nos conduz a um resultado inaceitável. [...] Os paradoxos são em geral enunciados através da proposição aparentemente pacífica que conduz a resultados inaceitáveis. Mas que resultados inaceitáveis são estes? O resultado paradoxal é a auto-contradição. [...] Uma contradição é uma relação lógica existente entre duas proposições. Duas proposições são contraditórias quando a verdade de uma implica a falsidade da outra e vice-versa. [...] A auto-contradição é a situação paradoxal na qual uma frase é contraditória consigo mesma. Assim, quando temos uma frase contraditória e procuramos saber o seu valor de verdade, deparamos sempre com a seguinte situação: quando partimos do princípio de que ela é verdadeira, concluímos que é falsa; e quando partimos do princípio que ela é falsa, concluímos que é verdadeira."

(Murcho, 1999)

Apesar do autor referir com veemência a inexistência do erro formal no paradoxo, ao utilizar os termos "tanto quanto conseguimos perceber" e "aparentemente", deixa em aberto que um paradoxo possa depender do grau de conhecimento do leitor: uma falácia cujo erro não é detectado por uma criança passa a ser para esta um paradoxo.

Nota-se algum receio dos autores em dizer que o paradoxo não permite o erro formal de raciocínio, apesar de não haver qualquer reticência em rejeitar raciocínios errados como sendo paradoxais.

Esta situação pode dever-se a, de um modo geral, ser muito mais fácil mostrar que existe um erro do que garantir que um determinado raciocínio está totalmente correcto.

Independentemente da dificuldade em escolher uma definição consensual de paradoxo, estes não deixam de ser matematicamente importantes. As questões levantadas por um paradoxo são das mais importantes, uma vez que podem colocar em causa alguns princípios básicos das teorias em que estão inseridos, motivando a sua evolução.

Neste trabalho apresentaremos situações contraditórias, analisando de forma sucinta a estrutura dos raciocínios na procura da razão da existência de tais contradições.

PARADOXO DO BARBEIRO

Dentro dos paradoxos acessíveis do ponto de vista linguístico e de fácil compreensão, mesmo para quem nunca estudou Matemática, destaca-se o *paradoxo do barbeiro*. Este paradoxo, assim como muitos outros, é enunciado sob a forma de uma história:

> *Numa aldeia existe um barbeiro que faz a barba a toda a gente da aldeia que não se barbeia a si mesmo. E pergunta-se: quem faz a barba ao barbeiro?*

A situação é paradoxal e a sua análise é bastante simples. Se ele faz a barba a si próprio então não pode ser o barbeiro a fazer-lhe a barba – mas o barbeiro é ele!... – donde, se ele faz a barba a si próprio então não é ele que a faz. Se, por outro lado, ele não faz a barba a si próprio, então é o barbeiro que lhe faz a barba – mas ele é o barbeiro!... – donde, se ele não faz a barba a si próprio então é ele que a faz. Concluímos, então, que o barbeiro faz a barba a si próprio se e só se não faz a barba a si próprio. Absurdo!

Ou seja, um pequeno enunciado tão simples e aparentemente tão "inocente" conduziu-nos a uma situação absurda. Ora, uma vez que, os raciocínios efectuados são válidos e o único pressuposto de que partimos foi o da existência de um barbeiro com aquelas características, podemos, então, concluir que não pode existir tal pessoa!

O facto de os enunciados estarem descritos em linguagem corrente facilita a sua compreensão e análise, no entanto, o rigor é, por vezes, menor, deixando em aberto algumas questões para os mais atentos. Neste caso do paradoxo do barbeiro, quando o enunciado é dito desta forma pressupõe algumas condições não explícitas, mas importantes para as conclusões obtidas:

1ª. – o barbeiro tem a barba feita;

Se o barbeiro não tem a barba feita, não existe situação paradoxal pois a resposta à pergunta é imediata: quem faz a barba ao barbeiro? ninguém!

2ª. – o barbeiro fez a barba na aldeia;

Admitindo que o barbeiro tem a barba feita e a fez fora da aldeia, a resposta também é fácil: quem fez a barba ao barbeiro? um outro barbeiro de outra terra!

3ª. – o barbeiro faz a barba àqueles e só àqueles que não se barbeiam a si próprios.

Admitindo agora as duas condições anteriores, é ainda importante esta terceira, pois ao dizermos que o barbeiro faz a barba a todos aqueles que não se barbeiam a si próprios não se excluímos a hipótese de ele, para além desses, também fazer a barba aos outros (àqueles que se barbeiam a si próprios) e aí a resposta também não seria difícil: quem faz a barba ao barbeiro? ele próprio!

Estas condições não explícitas não são habitualmente sequer questionadas por aqueles menos atentos que as admitem inconscientemente e sem problemas. A análise formal dos paradoxos, apesar de menos acessível, permite aos mais atentos facilmente dissipar questões como estas. Ora o tratamento formal do paradoxo do barbeiro pode ser feito através do paradoxo de Russell (que analisaremos a seguir). À primeira vista pode não ser totalmente perceptível a relação entre estes dois paradoxos mas, após uma pequena análise, o paralelo estrutural torna-se evidente.

PARADOXO DE RUSSELL

Quando se estudam paradoxos é inevitável a referência ao *paradoxo de Russell.* Apesar de desconhecido por quem nunca dedicou algum tempo à Matemática, este paradoxo é um dos mais célebres e mais importantes historicamente. Este paradoxo tem por base a consideração de um "conjunto especial".

Era comummente aceite, e pode ainda ser para os menos atentos, um conjunto ser definido por uma qualquer condição, sendo então constituído pelos elementos que respeitam tal condição. Neste contexto, Russell "criou" o conjunto definido pela condição: *ser um conjunto e não pertencer a si próprio.* Note-se que, ainda dentro da definição de conjunto através de uma condição, podemos referir vários conjuntos que pertençam, ou não, a si próprios. Conjuntos como o conjunto dos alunos duma escola ou o conjunto dos gatos pretos duma rua não pertencem a si próprios pois não são, respectivamente, nem alunos nem gatos – são conjuntos! Por outro lado, conjuntos como o conjunto do que não é aluno ou o conjunto do que não é gato pertencem a si próprios porque, sendo conjuntos, não são alunos nem gatos.

Voltemos, agora, ao conjunto definido por Russell:

o conjunto dos conjuntos que não pertencem a si próprios, ou seja,

$$A = \quad X : X \notin X \quad .$$

Ora, temos que A (por hipótese um conjunto) ou pertence ou não pertence a si próprio. Se A pertencer a si próprio, ou seja, se $A \in A$, então, por definição de A, A não pode pertencer a A, pois não é um conjunto que pertença a si próprio. Por outro lado, se A não pertencer a si próprio, ou seja, se $A \notin A$, então, novamente por definição de A, A tem que pertencer a A, pois é um conjunto que não pertence a si próprio. Ou seja, concluímos que se $A \in A$ então $A \notin A$ e se $A \notin A$ então $A \in A$, isto é $A \in A$ se e só se $A \notin A$, o que é manifestamente absurdo!

Ora a existência de uma entidade que permita obter tal conclusão é bastante preocupante para os fundamentos de toda a Matemática. Mostrou-se então que tal entidade não pode existir, isto é, que aquela condição por si só não define um conjunto. Ou seja, aquilo que à partida parecia pacífico e de fácil aceitação é-o apenas na aparência, exigindo, portanto, uma análise mais profunda no sentido de combater intuições erradas.

Como já foi referido há uma forte relação entre o paradoxo de Russell e o paradoxo do barbeiro, podendo o primeiro ser considerado como o tratamento matemático do segundo.

Note-se que na análise do paradoxo do barbeiro levantaram-se no final algumas questões não totalmente explícitas no enunciado. No paradoxo de Russell, apesar de semelhante, tais questões não se põem pois já estão bem definidas matematicamente.

O paralelo estrutural entre estes dois paradoxos é evidente:

I. PARADOXO DE RUSSELL	II. PARADOXO DO BARBEIRO
Pressuposto	
Existência de um conjunto cujos elementos são os conjuntos que não pertencem a si próprios.	Existência de um barbeiro numa aldeia que faz a barba a todas as pessoas da aldeia que não se barbeiam a si próprias.
Questão em análise	
O conjunto em causa pertence ou não a si próprio?	O barbeiro em causa barbeia-se ou não a si próprio?
Contradição	
O conjunto pertence a si próprio se e só se não pertence a si próprio.	O barbeiro barbeia-se a si próprio se e só se não se barbeia a si próprio.
Princípios matemáticos	**Condições não explícitas**
Qualquer conjunto ou pertence a si próprio ou não, não há terceira hipótese. Os elementos dum conjunto são aqueles e só aqueles que pertencem ao conjunto.	O barbeiro tem a barba feita e fê-la na aldeia. O barbeiro faz a barba àqueles e só àqueles que não se barbeiam a si próprios.

PROBLEMA DO MÊS (XXVIII)

Um estranho padrão

Pedro Palhares
Universidade do Minho

No problema XXVI apresentei uma história ocorrida por volta do século XVII, em que um corsário aborda com sucesso um barco cujo capitão, português de origem, faz comércio entre a América do Norte e a Inglaterra. Conquistado o barco e tendo morrido o capitão na refrega, ele encontra um cofre fechado com uma combinação secreta de dez cifras. Interrogados os marinheiros sobreviventes, eles dizem-lhe que a única coisa que sabem é que o capitão usava todos os dez dígitos de 0 a 9, mas não sabiam a ordem. Ele pensa um pouco, tenta a chave 8549176320 mas não consegue abrir o cofre. Logo de seguida tenta a chave 5298467310 e consegue abrir o cofre. Que raciocínio permitiu ao corsário abrir o cofre?

Como ajuda, coloquei uma questão para refletir: o que é que nos permite obter ordem num conjunto de dígitos todos diferentes e nos permite lembrar mais tarde?

Há muitas propriedades que nos permitem obter ordem num conjunto de dígitos embora nem todas nos permitam lembrar mais tarde, especialmente se o conjunto for grande e não fizermos uso dele amiúde. Claro que podemos ordenar os dígitos do maior para o mais pequeno ou do mais pequeno para o maior, mas essa não é uma boa ordem. O capitão estava sujeito a que um dos marinheiros, que sabiam que ele usava todos os dígitos de 0 a 9, o roubasse facilmente. Certamemte alguns dos marinheiros teriam já tentado alguma dessas combinações. Não, a combinação teria de ser mais dificil um pouco, especialmente de forma a poder enganar marinheiros sem grande educação mas que apesar de tudo não a tornasse demasiado dificil de lembrar. O que o corsário pensou é que porventura o capitão estaria a ordenar os dígitos por ordem alfabética. Assim estaria protegido dos marinheiros e se esquecesse, poderia sempre refazer. Tentou primeiro em inglês, pois o barco fazia viagens entre a inglaterra e a América. Não tendo conseguido tentou na língua natal do capitão, o português e aí conseguiu: cinco – dois – nove – oito – quatro – seis – sete – três – um – zero.

******

No número anterior apresentei um problema em forma de adivinha inventada por mim e pelo Leonel Vieira, que ia assim:

Qual é a coisa, qual é ela, que é um e são quatro,
E em que cada um com meia volta fica o mesmo,
e que quando se tira dois a dois, se fica com nove?

Ainda não consegue adivinhar? Digo-lhe mais:

Se a tudo aplicar uma meia volta e depois tirar dois a dois
fica novamente com nove. Afinal qual é a coisa, qual é ela?

Ainda não é desta? Pois então lhe digo apenas mais isto:
Se se tira o triplo nove, fica-se com outro que são quatro
E em que cada um com meia volta fica o mesmo.

Qual a ajuda que posso dar? Para quem ainda não conseguiu descobrir a resposta, o que posso dizer é, na primeira linha, talvez o um e o quatro se refiram a conceitos diferentes.

******

Para este número, selecionei este problema que li algures:

Como continuar este padrão?

12 , 1 , 1 , 1 , 2 , 1 , 3 , ...

Quem quiser comentar ou apresentar solução pode fazê-lo enviando e-mail para palhares@iec.uminho.pt, colocando problema do mês como título.

Índice