Ano 27º Lisboa, Março 2011 Nº 292

# Jornal de Mathemática Elementar

Endereço de Email
jme@spm.pt

**PUBLICAÇÃO MENSAL**

**Director Honorário: Sérgio Macias Marques**

**Director: Jorge Nuno Silva**

**Director adjunto: Helder Pinto**

**Preço:** ***1,80€*** **(IVA incluído)**

O JME regressa, agora com nova periodicidade. Neste número contamos com a colaboração de Henrique Leitão, que nos dá notícia de Rolando. O Dr Sérgio Macias Marques chamou a atenção para algumas gralhas num artigo que repetimos corrigido, hoje, da autoria de Carlos Grosso.

Jorge Nuno Silva

**FICHA TÉCNICA**

Registo nº 110029-ISSN 1646-978X
Nº Contribuinte 501065792
Impressão Repro 2000
Tiragem 1000 exemplares
Redacção e Administração
SPM. Av. da República, 45-3º
1050-187 LISBOA
Tel. 217 939 785

# GALERIA DE MATEMÁTICOS

*Henrique Leitão*[1]
*Centro Interuniversitário de História das Ciências e da Tecnologia*
*Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa*

## O primeiro matemático português?
## Rolando de Lisboa (fl. 1424)

Rolando de Lisboa (*Rolandus Ulixbonensis*) é, tanto quanto se pode apurar actualmente, o primeiro autor de origem portuguesa de quem se conhece um trabalho matemático extenso e de nível avançado -- *Scientia de numero ac virtute numeri* [ou também: *Aggregatorium sive compendium artis arismetice*] -- que subsiste num manuscrito presentemente em Nova Iorque (Columbia University, ms. Plimpton 173).

Gozou de grande fama no seu tempo, tendo sido mestre na Universidade de

[1] Gostava de expressar publicamente o meu agradecimento ao Dr. António Duarte, que me disponibilizou uma reprodução integral do manuscrito de aritmética de Rolando.

Paris e médico de John of Lancaster, Duque de Bedford, na altura regente de França. Para além deste texto de matemática, foi ainda o autor de outros trabalhos de índole científica. Esta nota pretende apenas chamar a atenção para esta importante personalidade, esquecida da historiografia matemática nacional, ao mesmo tempo que serve para recordar a longa história, bastante anterior ao século XVI, das actividades científicas em Portugal ou por portugueses.[2]

Os dados biográficos que se conhecem acerca de Rolando de Lisboa são relativamente escassos, não permitindo clarificar muitos aspectos importantes da sua vida.[3] Rolando identifica-se sempre como sendo "de Lisboa", *Ulixbonensis*, e o nome da mãe (Beatriz Gonçalves) é quase de certeza português. Apesar de a sua origem ser inquestionavelmente lisboeta, como o próprio sempre indicou, a sua carreira deve ter sido feita toda em França. Fez os seus estudos na Faculdade de Artes e depois na Faculdade de Medicina da Universidade de Paris, tendo sido admitido ao grau de bacharel de medicina em 1422 e ao de licenciado em medicina em 1424. A partir de Novembro de 1424 foi mestre regente na Faculdade de Medicina da Universidade de Paris, lugar que ocupou até 1441/2. Além das funções universitárias cumpriu outras funções eclesiásticas: foi cânone da Sainte-Chapelle de Paris antes de 1430, cânone e arcediago da igreja de Notre Dame d'Arras antes em 1439 e deão da igreja de Saint-Donat de Bruges em 1442.

Desempenhou também vários cargos nas cortes ducais. Por volta de 1425 era médico do duque de Bedford, John of Lancaster (sobrinho de Filipa de Lencastre), que na altura era o regente de França. Foi a ele que dedicou dois trabalhos: um

---

[2] Na verdade há fundamento documental para garantir a existência de estudos de temas matemático-astronómicos desde as primeiras décadas do século XIV em Portugal, como se deduz, por exemplo dos chamados "Almanaques astronómicos de Madrid" (Madrid, Biblioteca Nacional, MS 3349); vid. José Chabás and Bernard R. Goldstein, «Astronomical activity in Portugal in the fourteenth century», *Journal for the History of Astronomy*, 12 (2010) 199-212.

[3] Para a biografia de Rolando, ver: L. Thorndike, *A History of Magic and Experimental Science* (New York and London, 1934), tomo V, pp. 139-143; E. Wickersheimer, *Dictionnaire biographique des médecins en France au Moyen Âge* (Abbeville: Impr. F. Paillart; Paris: E. Droz, 1936 [Genéve, 1979]), pp. 723-724 [e D. Jacquart, *Supplément*, Genève, 1979, p. 264]; Ver o capítulo VIII, «Roland l' Ecrivain», in Thérèse Charmasson, *Recherches sur une technique divinatoire: La Géomancie dans l'Occident Médiéval* (Genéve: Droz, 1980), pp. 177-193.

tratado de fisiognomia e o tratado de matemática/aritmética. Passou depois ao serviço do duque de Borgonha, Filipe o Bom, a partir de Junho de 1437 provavelmente, onde ficou até 1469, data provável da sua morte.

Conhecem-se essencialmente três trabalhos de Rolando, alguns deles em cópias múltiplas: um tratado de aritmética, um tratado de fisiognomia, e um texto de geomancia.[4] Não nos deteremos aqui nos seus trabalhos de fisiognomia e de geomancia que, aliás, foram já alvo de estudos detalhados.[5] Interessa-nos apenas dar notícia do seu manuscrito de matemática.

O tratado de aritmética de Rolando de Lisboa preserva-se num manuscrito de 21 X 29.8 cm (com mancha de texto 15.5 X 21.5 cm), e com um total de 168 fólios. Trata-se de uma obra extensa, redigido numa letra cuidada, compacta, aparentemente de uma única mão (talvez duas) e encontra-se em excelente estado de conservação. Como já se disse está actualmente em Nova Iorque, na Columbia University, sendo o manuscrito 173 da famosa colecção Plimpton. No início (fol. 2r) vem identificado por *Scientia de numero ac virtute numeri*, mas no colofão por: *Aggregatorium sive compendium artis arismetice*. Não se pode dizer que se trate de um manuscrito desconhecido pois há mais de um século que circulam notícias bibliográficas acerca dele. A primeira foi dada em 1908, por David Eugene Smith, na *Rara Arithmetica*, aparecendo uma outra indicação poucos anos depois, no trabalho de David Eugene

[4] As cópias conhecidas do texto de fisiognomia são: Lisboa, Biblioteca da Ajuda, 52-XIII-18; Oxford, St. John's College, ms. 18 s. xv (G); Londres, British Library, ms. Royal 12.G.XII; Paris, Bibliothèque Nationale de France. ms. lat., 7340. O texto de geomancia sobrevive nas seguintes cópias: Londres, British Library, ms. Sloane 3847, fols. 1-193; Londres, British Library, ms. Royal 12.C.XVI, fols. 1-88; Oxford, Bodleian Library, Ashmole, 434. O tratado de aritmética tem apenas a cópia Plimpton 173. Existe ainda um manuscrito relativo a uma polémica em que também esteve envolvido: Paris, Bibliothèque Nationale de France, ms. lat., 7443, fols. 184-211v.

[5] Para o trabalho de Rolando em geomancia, ver: Thérèse Charmasson, *Recherches sur une technique divinatoire: La Géomancie dans l'Occident Médiéval* (Genéve: Droz, 1980); Para o trabalho de Rolando em fisiognomia, ver: Joseph Ziegler, «Médecine et physiognomonie du XIVe au début du XVIe siècle», *Médiévales*, 46 (2004) [http://medievales.revues.org/document805.html]; Joseph Ziegler, «Skins and Character in Medieval and Early Renaissance Physiognomy», *Micrologus*, 13 (2005) 511-535; Joseph Ziegler, «Philosophers and Physicians on the Scientific Validity of Latin Physiognomy, 1200—1500», *Early Science and Medicine*, 12 (2007) 285-312.

Smith and Louis Charles Karpinski, *The Hindu-Arabic Numerals* (1911), e, finalmente, uma terceira menção na *History of Mathematics* (2 vols, 1925) também de David Eugene Smith.[6] Nenhum destes trabalhos, contudo, apresenta qualquer análise do conteúdo e as apreciações que dele fazem são superficiais. Curiosamente, nenhuma destas indicações em obras consagradas parece ter sido suficiente para chamar a atenção dos historiadores da matemática nacional, nem mesmo depois de, em 1978, a historiadora francesa Thèrese Charmasson ter publicado um curto artigo sobre o manuscrito matemático de Rolando.[7]

A estudiosa francesa foi levada a dizer que o texto de Rolando era quase todo extraído do *Quadripartitum numerorum* de Jean de Murs (ca. 1290 – ca. 1351-1355). Questionou que tivesse alguma originalidade e que o seu interesse se situava sobretudo como testemunho da difusão da obra de Murs. Mas o estudo de Charmasson é muito esquemático e breve, e pouco elucida, em concreto, acerca do conteúdo. Assim, pode dizer-se com segurança que o manuscrito nunca foi estudado em detalhe --- uma tarefa que se afigura agora com alguma urgência. Parece, todavia, tratar-se de uma compilação de matérias de diversas fontes, em especial do *Quadripartitum numerorum* de Jean de Murs, mas também do *Algorismus proporcionum* de Nicole Oresme, reflectindo a tradição aritmética francesa de finais do século XIV e inícios do XV, redigido muito possivelmente com o objectivo de ser usado em aulas na universidade.[8]

---

[6] Respectivamente: David Eugene Smith, *Rara Arithmetica* (Boston: Ginn and Company, 1908), pp. 446-447; David Eugene Smith and Louis Charles Karpinski, *The Hindu-Arabic Numerals* (Boston: Ginn and Company, 1911; New York: Dover, 2004), p. 144; David Eugene Smith, *History of Mathematics*, 2 vols. (Boston: Ginn and Company, 1925; New York: Dover, 1958), vol. I, p. 261; vol. II, p. 77.

[7] Thérèse Charmasson, «L'arithmétique de Roland l'Écrivain et le Quadripartitutm numerorum de Jean de Murs», *Revue d'Histoire dês Sciences*, 31 (1978) 173-176. Infelizmente esta autora, que se interessou sobretudo pelo trabalho de geomancia de Rolando, optou por nunca o designar por Rolando de Lisboa introduzindo a designação de Roland l'Écrivain, que se tornou corrente, sobretudo entre os historiadores franceses.

[8] Vale a pena recordar que o *Quadripartitum numerorum* foi objecto de um excelente estudo e edição: *Le "Quadripartitum numerorum" de Jean de Murs*. Introduction et edition critique [par] Ghislaine L'Huillier (Genève: Droz, 1990).

Na epístola dedicatória (fols. 1r-2r) Rolando explica que foi por encargo do Duque de Bedford que compôs o seu texto e explica ainda que se socorreu dos tratados dos grandes antecessores, Euclides, Boécio, Campano de Novara e Jordano Nemorário: "O que os aritméticos pensaram eu cito tanto quanto me é possível, compilando fielmente e submetendo-me à correcção de vossa alteza. E se algumas pessoas me quiserem morder, deixá-las primeiro morder as demonstrações de Euclides, Boécio, Campano e Jordano. As conclusões das demonstrações irrefragáveis desses doutores são fundamentalmente sólidas." Logo de seguida expõe o plano da obra: o tratado será dividido em duas partes, a primeira, «pars speculativa» ou «theorica» (fols 2r-63v), trata dos diferentes aspectos do número e da geração dos números. A segunda, «pars pratica» (fols. 64r-167r), ensina as operações fundamentais: adição, subtracção, duplicação, multiplicação, radiciação, etc. alguns aspectos de aritmética mais avançados e algumas aplicações algébricas simples.

No actual estado da investigação o tratado aritmético de Rolando de Lisboa levanta seguramente muito mais questões do que as informações que transmite. Para além do estudo do conteúdo que importa fazer, estão ainda por clarificar as circunstâncias que rodearam a sua produção e as suas relações quer com os mecenas quer com o meio universitário. Em resumo: um texto (e uma personalidade) de inegável importância matemática, a necessitar de um estudo atento; mais uma peça, entre as muitas que felizmente têm vindo à luz nos últimos anos, e que permitirá, num futuro que se espera não muito distante, fazer uma reconstituição, completa e pormenorizada, das actividades matemáticas dos portugueses.

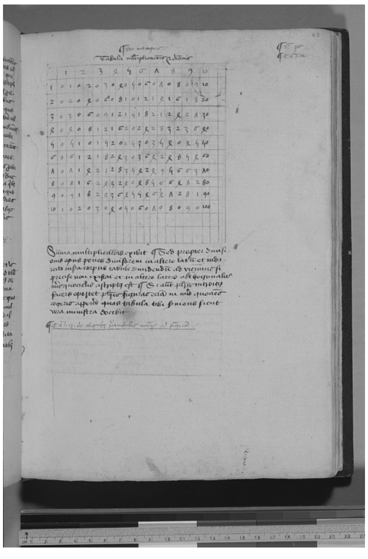
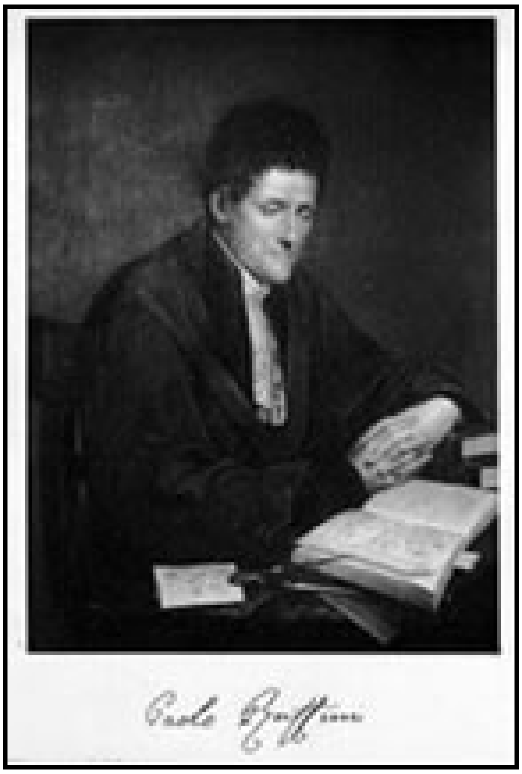


**Imagem do manuscrito matemático de Rolando de Lisboa**
**(New York, Columbia University Library, Plimpton 173, fol. 68)**

# Regra de Ruffini

*Carlos Grosso*




Resumo:

*No ensino secundário, a regra de Ruffini é aplicada na divisão por polinómios de primeiro grau ou, no caso do divisor ser de grau superior ao primeiro, quando as raízes do divisor são também raízes do dividendo.*

*Pretende-se mostrar que essa limitação usual pode ser ultrapassada, aplicando a regra de Ruffini nas divisões de qualquer polinómio por um polinómio decomponível em factores de primeiro grau, quer as raízes do divisor sejam ou não raízes do dividendo.*

A divisão inteira de polinómios é um assunto tratado no 10.º ano do Ensino Secundário. Os alunos começam por dividir os polinómios recorrendo ao algoritmo da divisão inteira, avançando depois para os casos particulares das divisões em que o divisor é um polinómio de primeiro grau, de preferência com o coeficiente do termo de primeiro grau igual à unidade, ou seja, polinómios que se podem apresentar na forma $(x-a)$.

Para o caso particular das divisões por polinómios do tipo $(x-a)$, os estudantes aprendem um algoritmo mais simples, inventado pelo médico e matemático italiano Paolo Ruffini (1765 – 1822). Uma boa parte da simplicidade do esquema de Ruffini resulta da omissão das partes literais, trabalhando apenas com os coeficientes.

Observemos um exemplo:
Divisão inteira de $P(x) = 3x^4 + x^3 - 5x^2 - 11x + 4$ por $x - 2$.

$$
\begin{array}{rrrrr|rrrr}
3x^4 & +\,x^3 & -\,5x^2 & -\,11x & +\,4 & x & -\,2 & & \\
\cline{6-9}
-\,3x^4 & +\,6x^3 & & & & 3x^3 & +\,7x^2 & +\,9x & +\,7 \\
\cline{1-5}
 & 7x^3 & -\,5x^2 & -\,11x & +\,4 & & & & \\
 & -7x^3 & +14x^2 & & & & & & \\
\cline{2-5}
 & & 9x^2 & -\,11x & +\,4 & & & & \\
 & & -9x^2 & +18x & & & & & \\
\cline{3-5}
 & & & 7x & +\,4 & & & & \\
 & & & -7x & +\,14 & & & & \\
\cline{4-5}
 & & & & 18 & & & &
\end{array}
$$

Aplicando o algoritmo que ficou conhecido como *Regra de Ruffini*, esta divisão efectua-se de um modo mais simples, ocupando até menos espaço, dispondo os termos da divisão conforme o esquema:

| | | |
|---|---|---|
| raiz do divisor | coeficientes do dividendo | |
| | coeficientes do quociente | resto |

Para a divisão apresentada, fica:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 3 | 1 | –5 | –11 | 4 |
| 2 | | 6 | 14 | 18 | 14 |
| | 3 | 7 | 9 | 7 | 18 |

quociente: $3x^3 + 7x^2 + 9x + 7$ resto: 18

Nos casos em que o polinómio divisor é de primeiro grau mas o coeficiente do termo de primeiro grau não é igual à unidade, $ax + b\ (a \neq 1)$, factoriza-se o divisor, pondo o coeficiente do termo de primeiro grau em evidência, $a\left(x + b/a\right)$. Em seguida, a regra de Ruffini é aplicada, dividindo $P(x)$ por $\left(x + b/a\right)$. O quociente desta divisão é dividido por $a$, obtendo-se o quociente pretendido e o resto da divisão é o mesmo.

Nesta altura, os alunos ficam a saber que podem aplicar a regra de Ruffini em qualquer divisão cujo divisor seja um polinómio de primeiro grau. Depois disto, avança-se para a aplicação da regra de Ruffini como auxiliar do processo de factorização de polinómios de grau superior ao segundo, o que, em muitos casos, envolve a aplicação sucessiva da regra de Ruffini. Ora, quando isso acontece, estamos efectivamente a utilizar a regra de Ruffini para divisões por polinómios de grau superior ao primeiro.

Vejamos um exercício vulgar:

Decompõe o polinómio $2x^4 - 10x^3 + 13x^2 - 5x + 6$, em factores de grau não superior ao segundo, sabendo que é divisível por $x^2 - 5x + 6$.

Encontradas as raízes de $x^2 - 5x + 6$, que são 2 e 3, aplica-se a regra de Ruffini, dividindo sucessivamente por $(x-2)$ e $x-3$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | –10 | 13 | –5 | 6 |
| 2 | | 4 | –12 | 2 | –6 |
| | 2 | –6 | 1 | –3 | 0 |
| 3 | | 6 | 0 | 3 | |
| | 2 | 0 | 1 | 0 | |

Assim, tem-se que $2x^4 - 10x^3 + 13x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)(2x^2+1)$.

Em todos os casos que se apresentam nos manuais do 10.º ano, esta aplicação da regra de Ruffini para dividir um polinómio por outro de grau superior ao primeiro, só acontece quando as raízes do divisor são também raízes do dividendo, fazendo com que o dividendo seja divisível pelo divisor.

Porém, a regra de Ruffini também se pode aplicar na divisão de qualquer polinómio por um polinómio de grau superior ao primeiro, que seja decomponível em polinómios de primeiro grau, mesmo quando as raízes do divisor não são raízes do dividendo, e os manuais de Matemática do 10.º ano do Ensino Secundário omitem esta possibilidade.

Observemos o caso menos extenso de um divisor que seja decomponível em dois polinómios de primeiro grau, $d = d_1 \times d_2$.

Começando por dividir o dividendo por $d_1$, vamos obter um determinado quociente $q_1$ e um resto $r_1$, de modo que:

$$D = d_1 \times q_1 + r_1 .$$

Dividindo em seguida o quociente obtido $\left(q_1\right)$ por $d_2$, teremos: $q_1 = d_2 \times q_2 + r_2$.

Então,

$D = d_1 \times \left(d_2 \times q_2 + r_2\right) + r_1$ é equivalente a $D = \left(d_1 \times d_2\right) \times q_2 + \left(r_2 \times d_1 + r_1\right)$,

onde $\left(d_1 \times d_2\right)$ é o divisor, $q_2$ é o quociente e $\left(r_2 \times d_1 + r_1\right)$ é o resto da divisão.

Ou seja, dividindo sucessivamente pelos factores do divisor, o último quociente é o quociente da divisão e o resto obtém-se multiplicando o último resto pelo divisor anterior e adicionando o resto anterior, fazendo este cálculo sucessivamente, quando o divisor tem mais factores.

Exemplo:

*Aplicar a regra de Ruffini para dividir* $x^3 + 3x^2 - 2x + 4$ *por* $x^2 - 5x + 6$.

O divisor $x^2 - 5x + 6$, é decomponível em $(x-2)(x-3)$.

Aplica-se sucessivamente a regra de Ruffini:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 3 | –2 | 4 |
| 2 | | 2 | 10 | 16 |
| | 1 | 5 | 8 | 20 |
| 3 | | 3 | 24 | |
| | 1 | 8 | 32 | |

O quociente da divisão é: $x + 8$.

Para determinar o resto da divisão, é necessário multiplicar o último resto pelo divisor anterior e adicionar com o resto anterior.

Assim, o resto da divisão é dado por $32(x-2)+20$, ou seja, $32x-44$.

Este procedimento pode aplicar-se para divisores com maior número de factores.

Também podemos aplicar este raciocínio em divisões inteiras de números naturais, por exemplo.

Em vez de dividir 123 por 14, vamos dividir 123 sucessivamente por 2 e por 7.

$$
\begin{array}{ccc|cc|c}
1 & 2 & 3 & 2 & & \\
 & 0 & 3 & 6 & 1 & 7 \\
 & & 1 & & 5 & 8
\end{array}
$$

Para determinar o resto, faz-se o cálculo $5\times 2+1$. Então, na divisão inteira de 123 por 14, o quociente é 8 e o resto é 11.

Observemos um caso em que o quociente é decomponível em três factores. Por exemplo, $42 = 2\times 3\times 7$.

Pelo procedimento indicado, vamos determinar o quociente e o resto da divisão inteira de 1234 por 42.

$$
\begin{array}{cccc|ccc|ccc|cc}
1 & 2 & 4 & 5 & 2 & & & & & & & \\
 & 0 & 4 & & 6 & 2 & 2 & 3 & & & & \\
 & & 0 & 5 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 7 & 7 & \\
 & & & 1 & & & 1 & & 6 & 7 & 2 & 9 \\
 & & & & & & & & & 4 & &
\end{array}
$$

O quociente é 29 e o resto é dado por $(4\times 3+1)\times 2+1$, ou seja, o resto é 27.

# PROBLEMA DO MÊS (XXVII)

## *Uma adivinha matemática*

*Pedro Palhares*
*Universidade do Minho*

No problema XXV apresentei um problema que refazia a história do inventor de xadrez, que de acordo com o que eu penso coloca o rei numa posição de grande fragilidade intelectual ao não ter o devido cuidado com o dinheiro nem ter tentado negociar um pouco, como é hábito oriental. Assim, o inventor começa por propor a conhecida sequência em que se coloca um grão de trigo no primeiro quadrado, e depois vai dobrando sucessivamente até chegar ao 64.º quadrado do tabuleiro.

Na minha história, o rei propõe começar por colocar um grão no 1.º quadrado, dobrar para o segundo quadrado, para o terceiro fazer a diferença entre o 1.º e o 2.º, e dobra-se, para o quarto fazer a diferença entre o 2.º e o 3.º, e dobra-se, etc.

Ora o inventor percebeu (concerteza já tinha também conhecimento dos números negativos) que se a diferença fosse feita retirando ao mais pequeno o maior, e mantendo essa ordem, ia ficar com muito pouco. Propõe então decidir a ordem em que se faz a diferença.

O rei verifica então que dessa forma ele acabará por ter um prémio ainda muito grande e retorque que não é justo e então se fará o seguinte: da primeira vez ele escolhe o sentido da diferença e nas vezes seguintes se irá alternando o sentido em que se faz a diferença.

Os dois concordam com a forma de obter a recompensa. A questão agora é saber afinal qual terá sido o prémio dado ao inventor do xadrez. Será que é agora possível dar o prémio? E ficará o inventor rico ou pobre?

Temos aqui uma série de sequências. Uma primeira proposta pelo inventor, bem conhecida: 1, 2, 4, 8, 16, 32, etc.

Depois outra proposta pelo rei: 1, 2, 2, 0, -4, -8, -8, 0, 16, etc.

Depois outra proposta pelo inventor: 1, 2, -2, 8, -20, 56, etc.

Depois duas em alternativa de acordo com a primeira escolha do inventor na ordem em que se faz a subtracção:

d1) 1, 2, -2, -8, 12, 40, -56, -192 etc.

d2) 1, 2, 2, 0, -4, 8, 24, etc.

A primeira é claramente favorável ao rei, o inventor rapidamente lhe fica a dever uma fortuna. A segunda parece inicialmente não ser prejudicial ao inventor – daí se calhar ele ter aceite, mas com mais algumas concretizações torna-se claro que o inventor se enganou e o rei em matérias de dinheiro é que sabe:

1, 2, 2, 0, -4, 8, 24, -32, -112, 160, 544, -968, etc.

Como sugeria o leitor Pedrosa Santos, mais valia deixar o inventor escolher os dois primeiros sentidos e a partir daí alternar, aí ele teria um lucrozinho. Pois, o inventor deveria ter continuado a negociar, mas os primeiros passos da sequência iludiram-no.

******

No número anterior apresentei um problema que conta uma história ocorrida por volta do século XVII, em que um corsário aborda com sucesso um barco cujo capitão, português de origem, faz comércio entre a América do Norte e a Inglaterra. Conquistado o barco e tendo morrido o capitão na refrega, ele encontra um cofre fechado com uma combinação secreta de dez cifras. Interrogados os marinheiros sobreviventes, eles dizem-lhe que a única coisa que sabem é que o capitão usava todos os dez dígitos de 0 a 9, mas não sabiam a ordem. Ele pensa um pouco, tenta a chave 8549176390 mas não consegue abrir o cofre. Logo de seguida tenta a chave 5298467310 e consegue abrir o cofre. Que raciocínio permitiu ao corsário abrir o cofre?

Qual a ajuda que posso dar? Para quem ainda não conseguiu descobrir o raciocínio, pois o que posso dizer é, o que é que nos permite obter ordem num conjunto de dígitos todos diferentes e nos permite lembrar mais tarde?

******

Para este número apresento a seguinte adivinha, construída juntamente com o Leonel Vieira:

*Qual é a coisa, qual é ela, que é um e são quatro,*
*E em que cada um com meia volta fica o mesmo,*
*e que quando se tira dois a dois, se fica com nove?*

*Ainda não consegue adivinhar? Digo-lhe mais:*
*Se a tudo aplicar uma meia volta e depois tirar dois a dois*
*fica novamente com nove. Afinal qual é a coisa, qual é ela?*

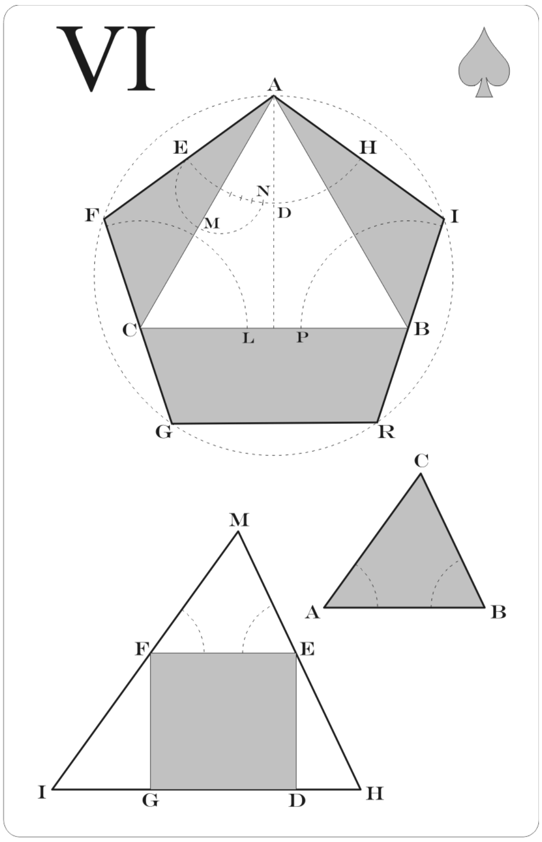
*Ainda não é desta? Pois então lhe digo apenas mais isto:*
*Se se tira o triplo nove, fica-se com outro que são quatro*
*E em que cada um com meia volta fica o mesmo.*

Quem quiser comentar ou apresentar solução pode fazê-lo enviando e-mail para palhares@iec.uminho.pt, colocando problema do mês como título.

# O BARALHO PEDAGÓGICO DE DESCARTES

*Marisa Ferreira*

## Sena de espadas




Descartes, na Sena de Espadas, apresenta-nos duas novas *Proposições*, com as respectivas construções geométricas, de como circunscrever polígonos noutros polígonos:

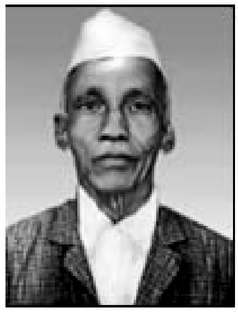
**Proposição VIII:** *Sobre um triângulo equilátero dado circunscrever um pentágono.*

**Proposição IX:** *Sobre um quadrado circunscrever um triângulo de ângulos iguais aos de um triângulo dado.*

# A ROTINA DE KAPREKAR

*Catarina Malheiro*

*Alexandra Gomes*



Shri Dattathreya Ramachandra Kaprekar, na fotografia ao lado[1], nasceu na Índia em 1905, filho de um clérigo fascinado por astrologia. Uma vez que a astrologia requer uma certa habilidade para o cálculo, o filho terá adquirido um gosto especial pelo cálculo em função do fascínio do pai.

Desde jovem, Kaprekar dedicava muito tempo à resolução de problemas matemáticos, tendo chegado a receber o prémio matemático Wrangler R P Paranjpe, pela melhor matemática original demonstrada por um estudante.

Graduou-se em Matemática em 1929 e, até se reformar, foi professor de matemática no ensino secundário. Era tido como um bom professor que usava o seu gosto pelo cálculo para estimular os seus estudantes. O seu fascínio pelos números era tal que ele considerava o seu vício por números equiparável ao alcoolismo.

Os problemas matemáticos a que Kaprekar se dedicava eram considerados pelos matemáticos mais iminentes como sendo triviais e pouco importantes, de tal forma que dificilmente conseguia publicar os seus trabalhos em revistas importantes, sendo conhecido fundamentalmente ao nível da matemática recreativa e dos jogos matemáticos.

Uma das suas descobertas mais famosas foi feita em 1946: a constante de Kaprekar. Esta descoberta foi apresentada na *Madras Mathematical Conference* em 1949, tendo sido posteriormente publicada na revista científica *Scripta Mathematica*, em 1953, no artigo *"Problems involving reversal of digits"*.

Vejamos então em que consiste a rotina de Kaprekar, que conduz sempre a um número constante, 6174, conhecido como constante de Kaprekar.

De uma forma sistemática:

- Para um qualquer número de 4 dígitos, considerando os dígitos não todos iguais, reorganiza-se o número de forma a obter o maior e o menor números possíveis que se podem formar com os quatro algarismos. Assim, obtêm-se os números $abcd$ e $dcba$, em que $a \geq b \geq c \geq d$ e $a$, $b$, $c$ e $d$ não são todos iguais.

- Seguidamente efectua-se a subtracção do valor menor ao valor maior:

$$\begin{array}{rcccc} & a & b & c & d \\ - & d & c & b & a \\ \hline & A & B & C & D \end{array}$$

Obtêm-se as relações seguintes:

$D = 10 + d - a$ (uma vez que, $a > d$)

$C = 10 + c - 1 - b = 9 + c - b$ (uma vez que $b > c$-1)

$B = b - 1 - c$ (uma vez que $b > c$)

$A = a - d$

- Organizam-se os algarismos do número obtido de forma a obter o maior e o menor números possíveis e subtrai-se novamente o menor do maior.
- Repete-se sempre este processo até encontrar um valor – 6174.

Vejamos uma situação particular. Vamos aplicar a rotina de Kaprekar ao número **3454**:

5443 – 3445 = 1998

9981 – 1899 = 8082

8820 – 0288 = 8532

8532 – 2358 = **6174**

7641 – 1467 = **6174**

No exemplo apresentado, foram necessárias 4 iterações para se obter a constante de Kaprekar.

Considere-se outro exemplo: **3743**.

7433 – 3347 = 4086

8640 – 0468 = 8172

8721 – 1278 = 7443

7443 – 3447 = 3996

9963 – 3699 = 6264

6642 – 2466 = 4176

7641 – 1467 = **6174**

Neste exemplo já foram necessárias 7 iterações até se obter a constante de Kaprekar.

O número de iterações necessárias depende dos algarismos que compõem o número seleccionado inicialmente.

Existem 8991 possibilidades de números obtidos pela combinação de quatro algarismos, desde 1000 até 9999, com a condição de não ser possível que o número tenha todos os algarismos iguais. Aplicando o processo de Kaprekar a estes números verifica-se que o número de iterações necessárias para se atingir a constante de Kaprekar é no máximo 7, sendo a frequência desse número apresentada no quadro seguinte[2]:

| ITERAÇÃO | FREQUÊNCIA |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 356 |
| 2 | 519 |
| 3 | 2124 |
| 4 | 1124 |
| 5 | 1379 |
| 6 | 1508 |
| 7 | 1980 |

Pela análise destes dados podemos verificar que a realização de 3 iterações para a obtenção da constante de Kaprekar é a situação mais comum, isto é, existem 2024 números dos 8991 possíveis, que necessitam da aplicação de 3 algoritmos da subtracção, de acordo com as condições estipuladas, para se obter a constante de Kaprekar. Considera-se que a aplicação do algoritmo à própria constante não requer nenhuma operação pelo que na tabela está representada a iteração “0”.

Roby Ellis and Jason Lewis[3] foram mais longe nas suas investigações. Exploraram todos as combinações possíveis de números com 4 algarismos e encontraram, para além da moda das iteracções, uma média de 4,6 iteracções para obter a constante de Kaprekar, com um desvio padrão de 1,8.

Estes investigadores reuniram todos os resultados e trataram-nos, seguindo-se a tabela que resume a distribuição das frequências do número de iterações realizadas até à obtenção da constante de Kaprekar, com números de 4 algarismos.

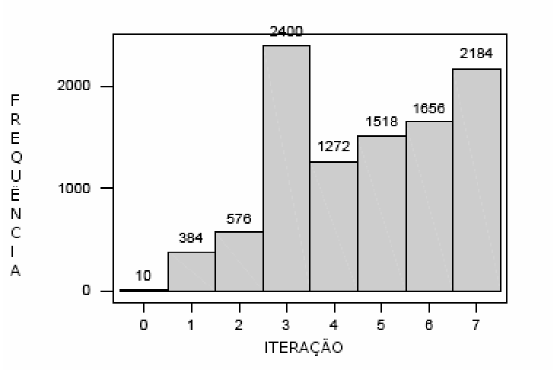



**Fig. 1 – Distribuição de frequências do número de iterações de números de 4 algarismos[3]**

O investigador Malcolm Lines [2] realizou um estudo acerca da aplicação da rotina de Kaprekar e verificou que para se concluir acerca do número máximo de iterações que devem ocorrer até se obter a constante de Kaprekar, não é necessário concretizar os algoritmos para todos os números de 4 algarimos. Vejamos o seu raciocínio.

Consideremos que se deseja a organização dos 4 algarismos de um número por ordem crescente e por ordem decrescente e que se deve subtrair o maior pelo menor. De uma forma genérica, para um número com os algarismos $a$, $b$, $c$, $d$ em que:

$9 \geq a \geq b \geq c \geq d \geq 0$, o número maior pode escrever-se na forma: 1000a+100b+10c+d e o número menor pode escrever-se na forma: 1000d+100c+10b+a.

Então, a primeira subtracção será:

$$1000a+100b+10c+d - (1000d\text{-}100c\text{-}10b\text{-}a)=1000(a\text{-}d) + 100(b\text{-}c) + 10(c\text{-}b) + (d\text{-}a)$$
$$= 999(a\text{-}d) + 90(b\text{-}c)$$

No seguimento das suposições que foram formuladas anteriormente, (a-d) pode tomar valores de 1 até 9 e (b-c) pode tomar valores de 0 até 9.

O autor sistematizou estes resultados numa tabela, atribuindo os valores possíveis a (a-d) e a (b-c):

| | | 999X(a-d) | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| | 0 | 999 | 1998 | 2997 | 3996 | 4995 | 5994 | 6993 | 7992 | 8991 |
| | 1 | 1089 | 2088 | 3087 | 4086 | 5085 | 6084 | 7083 | 8082 | 9081 |
| | 2 | 1179 | 2178 | 3177 | 4176 | 5175 | 6174 | 7173 | 8172 | 9171 |
| | 3 | 1269 | 2268 | 3267 | 4266 | 5265 | 6264 | 7263 | 8262 | 9261 |
| 90X | 4 | 1359 | 2358 | 3357 | 4356 | 5355 | 6354 | 7353 | 8352 | 9351 |
| (b-c) | 5 | 1449 | 2448 | 3447 | 4446 | 5445 | 6444 | 7443 | 8442 | 9441 |
| | 6 | 1539 | 2538 | 3537 | 4536 | 5535 | 6534 | 7533 | 8532 | 9531 |
| | 7 | 1629 | 2628 | 3627 | 4626 | 5625 | 6624 | 7623 | 8622 | 9621 |
| | 8 | 1719 | 2718 | 3717 | 4716 | 5715 | 6714 | 7713 | 8712 | 9711 |
| | 9 | 1809 | 2808 | 3807 | 4806 | 5805 | 6804 | 7803 | 8802 | 9801 |

**Fig.2 – Números obtidos após a primeira subtracção[2]**

Na tabela apresentada, encontra-se uma zona a  sombreado que corresponde aos números em que (a-d) < (b-c). Uma vez que estamos apenas interessados em números com algarimos todos diferentes e em que a $\geq$ b $\geq$ c $\geq$ d, estes números poderão ser excluídos e podemos reorganizar a tabela, colocando os números com os algarismos por ordem decrescente, de forma a poder aplicar-se a segunda subtracção:

| | | 999X(a-d) | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| | 0 | 9990 | 9981 | 9972 | 9963 | 9954 | 9954 | 9963 | 9972 | 9981 |
| | 1 | 9810 | 8820 | 8730 | 8640 | 8550 | 8640 | 8730 | 8820 | 9810 |
| | 2 | | 8721 | 7731 | 7641 | 7551 | 7641 | 7731 | 8721 | 9711 |
| | 3 | | | 7632 | 6642 | 6552 | 6642 | 7632 | 8622 | 9621 |
| 90X | 4 | | | | 6543 | 5553 | 6543 | 7533 | 8532 | 9531 |
| (b-c) | 5 | | | | | 5544 | 6444 | 7443 | 8442 | 9441 |
| | 6 | | | | | | 6543 | 7533 | 8532 | 9531 |
| | 7 | | | | | | | 7632 | 8622 | 9621 |
| | 8 | | | | | | | | 8712 | 9711 |
| | 9 | | | | | | | | | 9801 |

**Fig.3 – Números máximos, organizados para a segunda subtracção[2]**

Ignorando os que se encontram em duplicado, ficamos com um grupo de 30 algarismos que resumem o número de operações possíveis com a aplicação da rotina de Kaprekar. Isto é, dado um determinado número, a organização dos algarismos por ordem decrescente, fornece um destes números da tabela ou a aplicação do algoritmo fornece um desses números. Não existem, desta forma, combinações cujo número de ciclos da rotina seja maior.

Vejamos um diagrama que permite sistematizar melhor estas ideias:

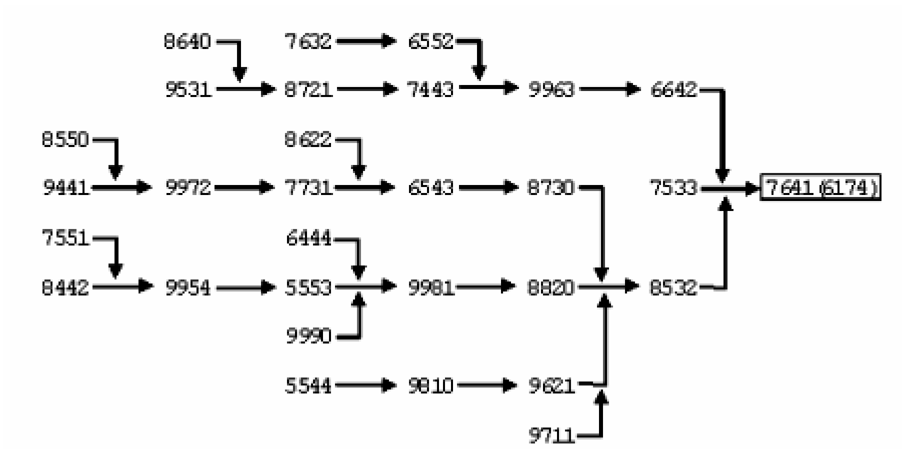



**Fig. 4 – Os 30 números e como se obtém, a partir destes, a constante de Kaprekar 6174 [2]**

Muitos cientistas de questionam acerca dos fundamentos que possam explicar a rotina e constantes de Kaprekar. Mas a verdade é que até agora tudo se parece resumir a uma bonita e feliz coincidência.

Mas sendo tão perfeita, esta rotina e constante seduzem investigadores que, habituados a um pensamento racional, procuram na teoria dos números um lugar para explicar este fenómeno.

Só pelo interesse e motivação que proporciona, este tema já ganha muito valor. Aliás, em torno deste e outros temas, a procura de uma explicação mais plausível conduz a novas descobertas e, desta forma, nunca se deixa de fazer ciência.

Bibliografia:

[1] http://www.gap-system.org/~history/Biographies/Kaprekar.html
(informação retirada em 23-03-2010)

[2] Nishiyama, Yutaka (2006). Mysterious number 6174. Plus Magazine, Issue 38.
Disponível em http://plus.maths.org/issue38/features/nishiyama/index.html
(informação retirada em 24-04-2010)

[3] Ellis, Roby; Lewis, Jason, (2002). *Investigations into the Kaprekar Process* - Department of Mathematics, East Tennessee State University, Johnson City, TN, USA.

## SOMAS DE QUADRADOS, CUBOS E ...

*Pedrosa Santos*

Acreditamos não ser fácil estabelecerem-se critérios de definição dos limites do que se considera ser a Matemática Elementar; sobretudo nas suas principais vertentes: *Aritmética*, *Álgebra* e *Geometria*. Para além do que uma definição de ontem não será, necessariamente, a mesma da de hoje, bem como será provavelmente diferente da de amanhã, por motivos óbvios a todos nós.

A evolução da matemática e o seu ensino adaptado às capacidades cognitivas do ser humano têm-se revelado favoráveis a uma manifesta progressão, de aquisição generalizada, de conhecimentos, apenas variável segundo o índice cultural das diferentes sociedades.

O tema, sumário e pontual, que propomos poderá parecer configurar a abordagem de um estudo das Séries Numéricas, o qual implica, presentemente, o envolvimento do que se denomina, academicamente, por matemáticas superiores. No entanto, nada nos impede a que nos restrinjamos simplesmente à soma de n termos da sucessão dos números naturais, em que aqueles estão elevados ao expoente 2, ao expoente 3, etc., no âmbito do ensino secundário.

Os resultados – expressões finais – que iremos apresentar são já bem conhecidos; porém, nem na Internet nem na bibliografia de autores portugueses conseguimos encontrar o processo de cálculo que se segue, muito embora não rejeitemos a eventualidade de já estar publicado. De qualquer modo, sublinhamos que não é um trabalho original; pois, para além de pequenas modificações e desenvolvimentos pessoais, retirámos o fundamental de dois livrinhos franceses, ambos já com respeitável idade:

- *COURS D'ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE (Conforme Aux Derniers Programmes de L'Enseignement Secondaire, 1925) par une Reunion des Professeurs – Librairie Général, Paris, 1927.*

- *COURS de MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES; Éléments d'Algèbre . Vve Ch. Poussielgue, Paris, 1912.*

**Cálculo directo da soma dos quadrados dos <u>n</u> primeiros naturais**

Seja $S_1 = 1 + 2 + 3 + ... + n$ e

$S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$

Utilizando a identidade $(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1^3$, ou o desenvolvimento de $(n+1)^3$ pelo Binómio de Newton, faz-se <u>n</u> sucessivamente igual a 0, 1, 2, 3, ..., *n*, podendo-se escrever as seguintes igualdades:

$$1^3 = 1$$

$$2^3 = (1+1)^3 = 1^3 + 3\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + 1^3$$

$$3^3 = (2+1)^3 = 2^3 + 3\cdot 2^2 + 3\cdot 2 + 1^3$$

$$4^3 = (3+1)^3 = 3^3 + 3\cdot 3^2 + 3\cdot 3 + 1^3$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(n+1)^3 = (n+1)^3 = n^3 + 3\cdot n^2 + 3\cdot n + 1^3$$

Somando membro a membro as igualdades anteriores (membros esquerdos e direitos) e após simplificação (em que se anulam os termos cúbicos), vem:

$$(n+1)^3 = 3\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2\right) + 3\left(1 + 2 + 3 + \ldots + n\right) + (n+1) \qquad (a)$$

Substitui-se a parcela, (soma), $(1 + 2 + 3 + \ldots + n)$ por $\frac{n}{2}(n+1) \quad (b)$.

$(n+1)^3 = 3S_2 + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1)$. Ou,

$$3S_2 = (n+1)^3 - \frac{3n(n+1)}{2} - (n+1)\text{; pondo } (n+1) \text{ em evidência,}$$

$$3S_2 = (n+1)\left[(n+1)^2 - \frac{3n}{2} - 1\right] \Rightarrow S_2 = \frac{(n+1)}{3}\left[(n+1)^2 - \frac{3n}{2} - 1\right] \quad (c)$$

$$S_2 = \frac{(n+1)}{3} \cdot \frac{n(2n+1)}{2}$$

$$\boxed{S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

Notas:

$(a)$ A parcela $(n+1)$ resulta da soma dos $1^3$, $(n+1)$ vezes.

$(b)$ Como se sabe, na demonstração da fórmula da soma dos termos de uma sucessão aritmética – 11º Ano, Matemática A.

$(c)$ Factorização da expressão entre parêntesis recto: $\left[(n+1)^2 - \frac{3n}{2} - 1\right] =$

$= \left[\frac{2(n+1)^2 - 3n - 2}{2}\right] = \left[\frac{2n^2 + 4n + 2 - 3n - 2}{2}\right] = \left[\frac{2n^2 + n}{2}\right] = \left[\frac{n(2n+1)}{2}\right]$.

**Cálculo directo da soma dos cubos dos $\underline{n}$ primeiros naturais**

Seja $S_1 = 1 + 2 + 3 + ... + n$ e

$S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$

$S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$

Considere-se a identidade $(n+1)^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1^4$, ou o respectivo desenvolvimento pelo Binómio de Newton, fazendo-se $\underline{n}$ sucessivamente igual a 0, 1, 2, 3, ..., $n$, podem-se escrever as seguintes igualdades:

$$1^4 = 1$$

$$2^4 = (1+1)^4 = 1^4 + 4\cdot 1^3 + 6\cdot 1^2 + 4\cdot 1 + 1^4$$

$$3^4 = (2+1)^4 = 2^4 + 4\cdot 2^3 + 6\cdot 2^2 + 4\cdot 2 + 1^4$$

$$4^4 = (3+1)^4 = 3^4 + 4\cdot 3^3 + 6\cdot 3^2 + 4\cdot 3 + 1^4$$

...............................................

$$(n+1)^4 = (n+1)^4 = n^4 + 4\cdot n^3 + 6\cdot n^2 + 4\cdot n + 1^4$$

De modo similar ao caso anterior, somam-se membro a membro as igualdades anteriores e simplifica-se (anulam-se os termos quárticos); vem,

$$(n+1)^4 = 4(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3) + 6(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) +$$
$$+ 4(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + (n+1)$$

$$(n+1)^4 = 4S_3 + 6S_2 + 4S_1 + (n+1)\text{, ou}$$

$$4S_3 = (n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - (n+1) \quad (a)$$

$$4S_3 = (n+1)\left[(n+1)^3 - n(2n+1) - 2n - 1\right] \quad (b)$$

$$4S_3 = (n+1)n^2(n+1)$$

$$4S_3 = n^2(n+1)^2 \Rightarrow \boxed{S_3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}} = \boxed{(S_1)^2}$$

Notas

$(a)$ $S_2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ e $S_1 = \dfrac{n(n+1)}{2}$

$(b)$ Factorização da expressão entre parênteses rectos:

$$\left[(n+1)^3 - n(2n+1) - 2n - 1\right] = \left[n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 2n^2 - n - 2n - 1\right] = \left[n^3 + n^2\right] = \left[n^2(n+1)\right].$$

Finalmente, pelo mesmo processo recursivo, é possível calcular a soma das quartas potências dos $\underline{n}$ primeiros naturais — $\dfrac{n(n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$ — bem como, teoricamente, qualquer outra potência que se pretenda.

Numa última generalização – expoente $\underline{m}$, c/ $m \in \mathbb{N}$, que não segue o processo de recorrência, ter-se-á:

$$\sum_{i=0}^{n} i^m = \frac{(n+1)^{m+1}}{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_k}{m-k+1}\binom{m}{k}(n+1)^{m-k+1}$$, onde $B_k$ é o k-ésimo número de Bernoulli.

Obs:

Está fora do escopo desta apresentação sumária, qualquer tentativa, mesmo resumida, de esclarecimento sobre os números de Bernoulli. Contudo, para os mais interessados, deixamos algumas referências bibliográficas do imenso acervo do tema:

- Cálculo com Geometria Analítica (Vol II), de George F. Simmons, da McGraw-Hill.

- Lições de Cálculo Integral e Diferencial (Vol II), de A. Ostrwski, Fund. C. Gulbenkian.

- An Atlas of Functions, de Jerome Spanier and Keith B. Oldham, Hemisphere Publishing Corporation – New York / Washington.

Advanced Engineering Mathematics, de C. Ray Wylie - McGraw-Hill.

- Theory and Application of Infinite Series, de Konrad Knopp, Dover Publications, INC, New York.

- CRC Concise Encyclopedia of Mathematics, de Eric W. Weisstein, Chapman & Hall / CRC – New York.

# Problemas de Outros Tempos (3º)

*Helder Pinto*

Nesta edição não apresentaremos um problema mas sim um texto – denominado "A Alegria do saber" – onde se reproduz um diálogo entre um menino que se queixa dos números e a sua mãe. Como em muitos textos escolares desta época (anos 50) existe uma "moral" para o jovem retirar: "Custa a aprender, mas é proveitoso e dá gosto saber." Não se contraria o facto de os números não terem "graça" no presente, mas motiva-se o trabalho árduo com a "promessa" de que o esforço terá a sua recompensa a médio/longo prazo (como no caso da mãe com a música).

Curioso é ainda o facto de também naquela altura parecer reconhecer-se que existe uma certa predisposição nos alunos para gostarem pouco dos números…

Nesta secção do Jornal de Matemática Elementar estamos a apresentar regularmente alguns problemas de matemática que foram publicados em livros escolares portugueses do passado. Como usual, contámos com a colaboração dos nossos leitores fazendo-nos chegar cópias de problemas antigos que considerem interessantes para o e-mail *hbmpinto1981@gmail.com*.

## "A Alegria de Saber"

- Ai mãezinha, – dizia muito desanimado o Luís – das letras ainda gosto, mas dos algarismos não gosto nada. Não têm graça nenhuma!

- Mas porquê?

- Olhe, minha mãe: Eu gosto de ler palavras como estas: *Um ramo de cerejas, um braçado de rosas*. Compreendo o que elas querem dizer. Mas veja agora um número assim: 1 0 4 9 5 … Que graça pode haver nisso?

- Ó filho, até mesmo as coisas lindas parecem feias quando se começam. Uma renda, um ninho, uma casa, tudo o que está no princípio, quase sempre custa e desagrada.

Mas o Luís não se deu por convencido. E a mãe, para o distrair, pôs-se a tocar uma linda música de que ele gostava muito.

- Que linda que é esta música!

- Ah! Gostaste?

- Muito, muito. E a mãezinha toca tão bem!

- Pois nem sempre toquei assim.

- Não?

- Primeiro tive de aprender. E queres saber como foi? Olha, foi desta maneira...

E, tomando da estante um livro, começou a solfejar:

- Dó, ré, mi, fá, sol, lá, si, dó...

- Ó mãezinha, cale-se! Até parece que voltei ao b... á... bá!

- É assim, meu filho, que se aprende. Foi por este caminho que cheguei a tocar a linda música de que tanto gostas. É combinando as notas devidamente que se obtêm lindas melodias. Assim te há-de suceder com os números. Tempo virá em que farás com eles operações que, além da utilidade, têm também a sua beleza.

Custa a aprender, mas é proveitoso e dá gosto saber."

***O Livro da Segunda Classe*; Ministério da Educação Nacional e Editora Educação Nacional de Adolfo Machado; Porto, 1958 (6.ª edição); pp. 34 e 35.**

# Índice