Ano 26º Lisboa, Junho/Setembro 2010 Nº 287/8

Jornal de Mathemática Elementar

Endereço de Email
jme@spm.pt

PUBLICAÇÃO MENSAL

Director Honorário: Sérgio Macias Marques

Director: Jorge Nuno Silva **Preço:** ***1,80€*** **(IVA incluído)**

Aqui estamos de regresso, após as merecidas férias escolares.
Fazemos votos de que o novo ano lectivo traga para todos os maiores sucessos.

Este número, maior do que o usual, engloba os de Junho e Setembro.

Jorge Nuno Silva

FICHA TÉCNICA

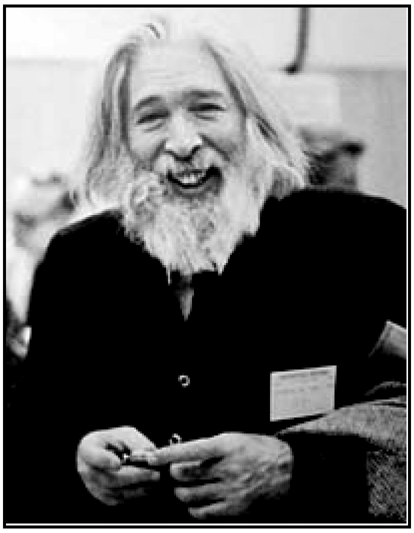
Registo nº 110029-ISSN 1646-978X
Nº Contribuinte 501065792
Impressão Repro 2000
Tiragem 1000 exemplares
Redacção e Administração
SPM. Av. da República, 45-3º
1050-187 Lisboa
Tel. 217 939 785

Galeria de Matemáticos

Jorge Nuno Silva

Raymond Merrill Smullyan

(1919 -)



Raymond Smullyan nasceu em Nova Iorque, EUA, em 25 de Maio de 1919.

A sua paixão por paradoxos lógicos nasceu quando, no dia das petas de 1925, o seu irmão mais velho lhe disse:

"este ano vou-te enganar como nunca foste enganado!"

Raymond esperou todo o dia, mas nada aconteceu. De noite perguntou-se muitas vezes se teria, ou não, sido enganado, visto o irmão ter faltado à promessa de o enganar...

Desde muito novo que se sentiu atraído pela música --- dedicou-se ao piano, mas também tocava violino --- e pela matemática.

A sua veia musical foi notada por sua mãe, que notou que o pequeno Ray, com meses de idade, respondia ao som dos diversos pássaros nas respectivas notas. Usando o piano doméstico e um jogo concluiu que o filho possuía o chamado ouvido absoluto.

Para se dedicar à matemática avançada abandonou a escola secundária no Bronx e tornou-se autodidacta.

Passou pelas universidades Pacific College, no Oregon, e Reed College antes de se mudar para S. Francisco onde tencionava estudar piano. Durante vários anos Smullyan não se conseguiu decidir entre a música e a matemática e nunca se adaptou ao estilo formal das universidades.

De volta a Nova Iorque, dedicou-se à lógica e à matemática, sobrevivendo como mágico profissional.

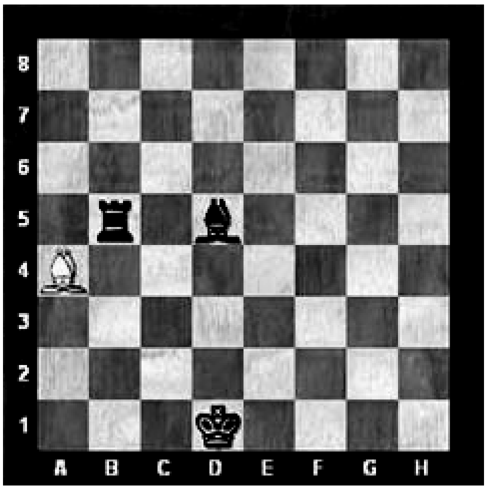
Em 1949 foi para a Universidade de Chicago, de novo recorrendo à sua profissão de mágico para custear a sua vida de estudante. Enquanto aluno de licenciatura começou a publicar artigos de investigação. Em Chicago foi aluno de Carnap, que o recomendou para uma posição docente em Dartmouth College. Como Raymond não tinha qualificações formais para tal, foram-lhe dados os créditos relativos a cursos que nunca frequentara, mas havia leccionado!

Em 1957 foi para Princeton trabalhar no seu doutoramento, sob a orientação de Alonzo Church, grau que lhe foi concedido em 1959. Aqui permaneceu até 1961. Em 1968 regressou a Nova Iorque, onde trabalhou nas universidades Jewish Yeshiva e Lehman College. Em 1982 mudou-se para a Universidade de Indiana, de que é hoje Professor Emérito.

Desde 1982 vive na região de Catskill Mountains, no Estado de Nova Iorque, preenchendo os seus dias com música e passeios pela belíssima natureza que o rodeia.

A paisagem protegida de Catskill Mountains

Para além dos trabalhos de Lógica, sobre o Teorema de Goedel e temas relacionados, Smullyan escreveu livros de problemas de xadrez de um tipo diferente do habitual. Trata-se de problemas de análise retrógrada, em que é necessário deduzir a história da posição apresentada. Vejamos um exemplo:



onde se deve colocar o Rei branco, que caiu ao chão, e quais foram os dois últimos lances deste jogo?

Livros como *The Chess Mysteries of the Arabian Nights* são hoje objectos de culto entre os aficionados.

Para além destes, Raymond criou puzzles lógicos muito originais, sendo os mais populares os relacionados com a terra onde cada elemento da população fala sempre verdade ou mente sempre. Os seus livros *The Lady or the Tiger* e *What is the name of this Book?* são verdadeiros clássicos.

Vejamos um exemplo. Suponhamos que os Verdes falam sempre verdade e os Azuis mentem sempre. Encontramos dois habitantes deste mundo estranho, o António e a Beatriz. Diz o António: "Pelo menos um de nós é Azul". Que se pode concluir sobre a natureza do António e da Beatriz?

Noutra ocasião travámos conhecimento com o Ângelo, o Bento e a Capitolina. Diz o Ângelo: "Somos todos Azuis". Corrige o Bento: "Exactamente um de nós é Verde". Que podemos concluir?

Claro que as coisas se complicam se, no mesmo mundo, um desconhecido nos disser: "Você nunca acreditará que eu sou um Verde"... (Retirada de *Forever Undicided*).

Quando se estava a doutorar, numa visita a Nova Iorque, conheceu a que viria a ser sua mulher durante “48 maravilhosos anos”, Blanche, pianista profissional. Num dos seus primeiros encontros fez-lhe a seguinte proposta: “Vou dizer-te uma frase. Se ela for verdadeira, dás-me o teu autógrafo, se for falsa, não dás”. Blanche concordou. A frase que Raymond disparou de seguida foi: “Não me darás o teu autógrafo nem um beijo”. Para Blanche manter o contrato válido terá de beijar o seu pretendente... Ardis como este conduziram a um casamento feliz, que terminou com a morte de Blanche com 100 anos de idade.

Blanche

Não admira que sobre ele Martin Gardner tenha escrito:

“Trata-se de um conjunto único de personalidades
que incluem um filósofo, um lógico,
um matemático, um músico,
um escritor e um inventor
de puzzles maravilhosos.”

A relação de Raymond Smullyan com Gardner incluiu também a participação de Raymond nos diversos Gathering 4 Gardner (G4G), encontros a que se refere com grande entusiasmo.

Raymond Smullyan e o autor no G4G8

Muito interessado em misticismo e religião, Raymond foi influenciado por um livro, *Cosmic Consciousness*, de Richard Bucke. Livro este que, como faz questão de frisar, não pode elogiar demasiado.

Esta sua faceta levou-o a escrever *Some Rambles Inspired by Taoism and Zen*, num tom ligeiro, como era seu hábito. Algumas piadas neste texto surgem a caracterizar as respectivas comunidades e culturas. Por exemplo, cita o mestre Suzuki que, numa visita a uma universidade americana, diz: "O Zen não é tão difícil de compreender como os americanos supõem. Só que em Zen a uma espada nós chamamos não-espada".

O mesmo texto contém o seguinte diálogo entre duas vacas. "Não te preocupa a doença das vacas loucas?" Resposta: "Por que havia de preocupar? Eu sou um helicóptero!"

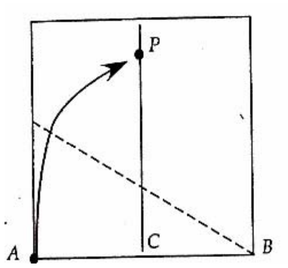
Construção de Alguns Origamis Geométricos

- Triângulo, Pentágono e Hexágono regulares -

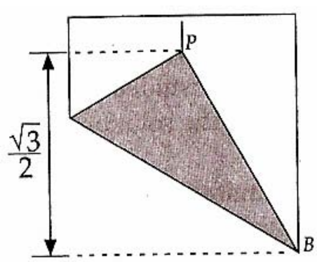
Liliana Monteiro

- Triângulo Equilátero

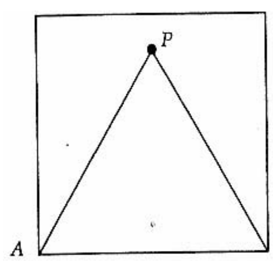
Vamos construir um triângulo equilátero a partir de um quadrado de papel com uma unidade de comprimento de lado [Hull06]:



(1) Dobrar o papel ao meio e criar a recta que sobrepõe A a um ponto da recta anterior, passando por B.



(2) Construir o segmento de recta BP e desdobrar.



(3) Construir o segmento de recta AP e desdobrar.

Demonstremos que obtivemos efectivamente um triângulo equilátero.

Por definição do quadrado que papel, sabemos que $\overline{AB} = 1$. Uma vez que a recta CP divide o papel ao meio e C se encontra na intersecção com AB, temos que $\overline{AC} = \overline{BC} = \dfrac{1}{2}$. Além disto, $[BP]$ é a imagem de $[AB]$através da reflexão efectuada em **(1)**, pelo que $\overline{BP} = \overline{AB} = 1$.

Pelo teorema de Pitágoras, uma vez que o ângulo BCP é recto, temos que

$$\begin{aligned}
&\overline{BC}^2 + \overline{CP}^2 = \overline{BP}^2 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \overline{CP}^2 = 1^2 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \overline{CP} = \frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

Voltando a aplicar o Teorema de Pitágoras, vem que:

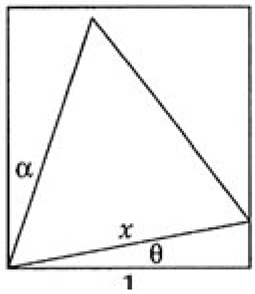
$$\begin{aligned}
&\overline{AC}^2 + \overline{CP}^2 = \overline{AP}^2 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \overline{AP}^2 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \overline{AP} = 1.
\end{aligned}$$

Deste modo, o triângulo [ABP] é equilátero, com o comprimento dos lados igual ao comprimento dos lados do papel.

Vamos agora tentar obter o triângulo equilátero de área máxima possível de obter no quadrado de papel.

Neste caso, um dos vértices do triângulo vai coincidir com um dos vértices do quadrado. De facto, se tal não acontecer, o triângulo (3 vértices) não intersecta um dos lados do quadrado (4 lados). Suponhamos, sem perda de generalidade, que esse lado é o esquerdo. Os vértices do triângulo intersectam apenas os restantes três lados do quadrado, o que não permite a construção pretendida.

Podemos então deslizar o triângulo para a esquerda, até que um dos seus vértices coincida com um dos vértices do lado esquerdo do quadrado. Suponhamos que o vértice do triângulo coincide com o vértice inferior esquerdo do quadrado.



Vejamos qual a rotação, de ângulo θ (em radianos) e centrada nesse vértice, que nos permite obter o triângulo equilátero de área máxima. Designemos por x o comprimento do lado deste triângulo.

Uma vez que os ângulos internos do quadrado têm uma amplitude de $\frac{\pi}{4}$ rad e os ângulos internos do triângulo equilátero têm uma amplitude de $\frac{\pi}{3}$ rad, podemos fazer a restrição $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{12}$. De facto, se $\frac{\pi}{12} < \theta \leq \frac{\pi}{6}$ teríamos o caso simétrico $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{12}$.

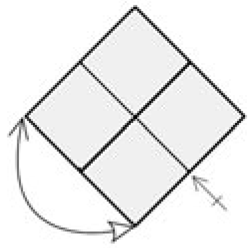
Uma vez que a base do triângulo tem de comprimento x, a sua altura é, pelos cálculos anteriores, $\frac{\sqrt{3}}{2}x$ e $x = \frac{1}{\cos x} = \sec\theta$, temos que a área á dada por

$$A = \frac{x \times \frac{\sqrt{3}}{2}x}{2} \Leftrightarrow A = \frac{\sqrt{3}}{4}\sec^2\theta\,.$$

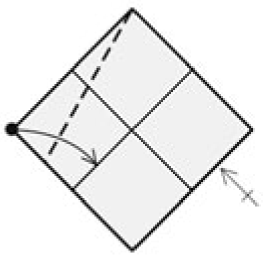
A função $\cos\theta$ é decrescente para $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{12}$, pelo que a função $\sec\theta$ é crescente nesse mesmo intervalo. Deste modo, $\sec^2\theta$ é crescente para $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{12}$ e, consequentemente, o valor máximo da área será obtido para $\theta = \frac{\pi}{12}$.

A imagem resultante desta rotação consiste num triângulo com um vértice comum ao quadrado e simétrico relativamente à diagonal do quadrado.

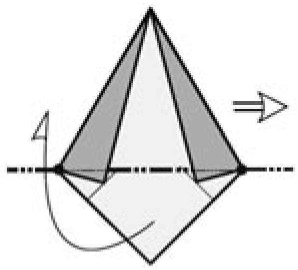
Abaixo, encontram-se as instruções para dobrar este triângulo. De salientar que no passo **(2')** o vinco forma um ângulo de $\frac{\pi}{12}$ radianos com o lado do quadrado de papel.



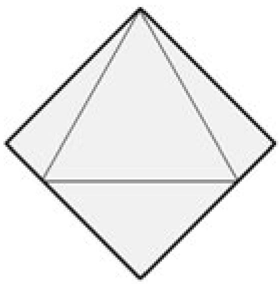
(1') Dobrar ambas as metades do quadrado de papel.



(2') Criar o vinco que passa pelo vértice superior do papel e faz os vértices centrais incidir nos vincos criados em (1).



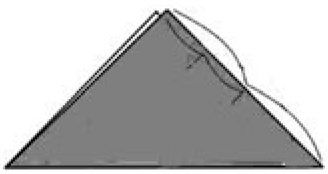
(3') Criar a recta que passa pelos dois pontos dos bordos do papel criados em (2)



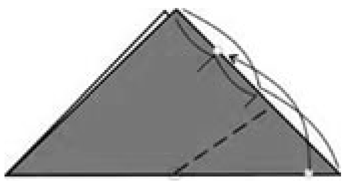
(4') Obtém-se um triângulo equilátero de área máxima.

– Pentágono regular

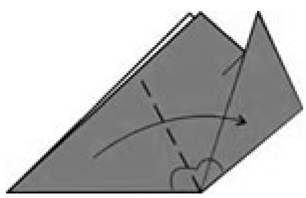
Vamos construir um pentágono regular a partir de um quadrado de papel:



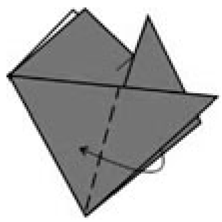
(1) Dobrar o quadrado de papel por uma diagonal. Fazer pequenas marcas para dividir o lado em quartos.



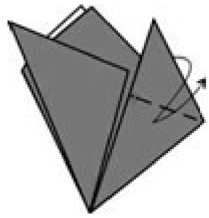
(2) Dobrar novamente fazendo o ponto que identifica o quarto superior incidir na diagonal dobrada.



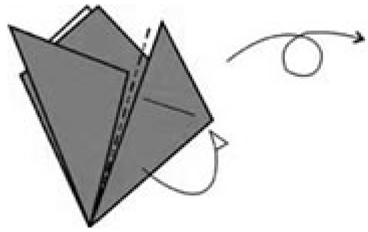
(3) Dobrar para a direita, de forma a bissectar o ângulo formado no passo anterior.



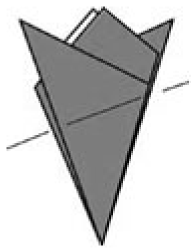
(4) Dobrar a ponta superior para a esquerda, de forma a bissectar o ângulo formado no passo anterior.



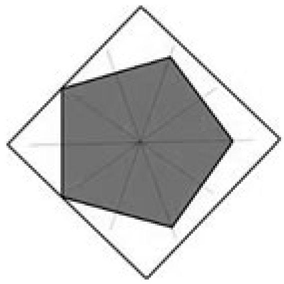
(5) Dobar e desdobrar a ponta superior direita, formando um ângulo recto e fazendo o vinco passar pelo vértice mais à direita.



(6) Dobrar para trás e virar.



(7) Dobrar pela recta construída no passo (5).

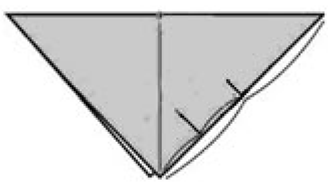


(8) Ao desdobrar obtém-se um pentágono regular.

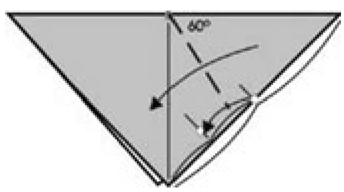
Verifica-se facilmente que esta construção nos permite obter um pentágono regular. Basta para tal considerar cada um dos triângulos que formam este polígono e constatar, no passo **(7)**, que os ângulos ao centro estão sobrepostos, pelo que têm a mesma amplitude.

- Hexágono regular

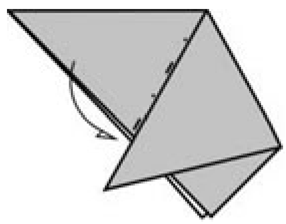
Vamos construir um pentágono regular a partir de um quadrado de papel:



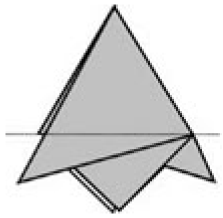
(1) Dobrar as diagonais do quadrado de papel. Fazer pequenas marcas para dividir um lado em quartos.



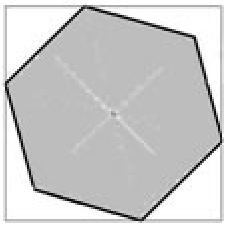
(2) Dobrar novamente fazendo o ponto que identifica metade do lado incidir no quarto inferior.



(3) Dobrar para trás.



(4) Vincar pela recta indicada na figura.



(5) Ao desdobrar obtém-se um hexágono regular.

Verifica-se facilmente que esta construção nos permite obter um hexágono regular. Tal como no caso do pentágono, basta para tal considerar cada um dos triângulos que formam este polígono e constatar, no passo **(4)**, que os ângulos ao centro estão sobrepostos, pelo que têm a mesma amplitude.

Saliente-se que este polígono está construído com uma rotação de $\frac{\pi}{12}$ radianos relativamente ao lado do quadrado de papel. Como já tínhamos visto, este valor permite-nos obter triângulos equiláteros de amplitude máxima, pelo que o hexágono regular aqui construído tem também área máxima.

Referências Bibliográficas:

[Mont09] Liliana Monteiro, *Fundamentos Matemáticos do Origami*, Associação Ludus, Lisboa, 2008

PROBLEMA DO MÊS (XXIV)

Sequência de números

Pedro Palhares
Universidade do Minho

No problema XXII apresentei uma situação em que um piloto de rally percorria um troço de 3km de estrada a 140km por hora, outra parte de 1,5km a 168 km por hora e uma última parte de 1,5km a 210km por hora. No fim perguntava qual a velocidade média do piloto no percurso de 6km. No último número, a jeito de ajuda, perguntava se a velocidade média equivalia à média das velocidades.

Para quem reflectiu um bocadinho sobre a questão, não terá sido difícil chegar à conclusão que não é igual uma coisa e outra. Aliás, fazendo um caso simples, se percorrer um troço de 60k a 60km/h e outro troço de 120k a 120km/h, gasto 2 horas, uma em cada troço. E se por outro lado fizer a soma dos percursos (180km) a dividir pela velocidade média (90km/h) dá-me também 2 horas. Espera! Isso quer dizer que afinal são iguais, certo? Mas ouvi dizer que não eram iguais. Não sei que pensar já.

É melhor resolver de outra forma, que esta não está a dar. Vamos pensar por partes e recorrendo à regra de três simples. Se percorro 140km numa hora, irei percorrer 3km em 3/140 h. E assim percorro o segundo troço em 1,5/168 h e o terceiro troço em 1,5/210 h. Ou seja percorro o caminho total em

$$\frac{3}{140}+\frac{3}{336}+\frac{3}{420}$$

$$\frac{36}{1680}+\frac{15}{1680}+\frac{12}{1680}$$

$$\frac{63}{1680}$$

Agora, se percorro 6km em $\frac{63}{1680}$ h, quanto percorro em cada hora? Esta nova regra de três simples dá-me agora $6 \div \frac{63}{1680}$ km/h.

Ou seja, 160km/h

******

No número anterior apresentei um problema sobre a vida, a morte e a vida após a morte. Nele eu indicava uma série de afirmações:

a) se a vida começa aos oitenta anos e Atila morreu com 75 anos, então Átila o Huno nunca viveu e não reencarnou como uma serpente;

b) se a vida não começa aos oitenta anos e se o desenvolvimento emocional dos primatas é semelhante aos dos répteis, então das duas uma: ou Átila o Huno nunca viveu ou a serpente fêmea não é mais mortal que a serpente macho.

c) a não ser que o desenvolvimento emocional dos primatas não seja semelhante ao dos répteis, então, ou Átila o Huno nunca viveu ou então morreu aos setenta e cinco anos.

d) o desenvolvimento emocional dos primatas é semelhante ao dos répteis desde que a serpente fêmea seja mais mortal que a serpente macho.

e) se a serpente fêmea não é mais mortal que a serpente macho, então não é possível que ou a vida comece aos oitenta anos ou que Átila o Huno tivesse morrido aos setenta e cinco anos.

f) Átila o Huno viveu.

Daí parti para uma série de questões:

1) Será que ele morreu aos setenta e cinco anos?

2) Será que o desenvolvimento emocional dos primatas é semelhante ao dos répteis?

3) Será que Atila o Huno reencarnou como serpente?

Qual a ajuda que posso dar aqui? O que temos que fazer é raciocinar de forma lógica e não emocional. Porventura temos que utilizar aqui ferramentas que nos abstraiam do que está em causa do ponto de vista emocional, afectivo ou de convicções. Será que conseguem?

******

Para este número, encontrei esta situação:

Consideremos a sequência dos números naturais. Elimine cada número numa posição múltipla de 3. Construa nova sequência com as somas cumulativas. Elimine todos os números em posição par. De novo construa uma sequência com as somas cumulativas. Que sequência é esta? E como explica o que acontece?

1 2 3 4 5 6…

1 2 4 5 …

1 3 7 12…

1 7…

1 8…

Quem quiser comentar ou apresentar solução pode fazê-lo enviando e-mail para *palhares@iec.uminho.pt*, colocando problema do mês como título.

126. Teorema da definição por indução. Dados uma função arbitrária (injectiva ou não) θ de um conjunto Ω em si próprio, e um determinado elemento $\omega \in \Omega$, então existe uma e uma só função ψ em N, que satisfaz as condições

I. $\psi[N] \subseteq \Omega$
II. $\psi(1) = \omega$
III. $\psi(n') = \theta\psi(n)$, para todo o número n.

Prova. Visto que, se realmente existe uma tal função ψ, por (21) ela contém a restrição ψ_n em Z_n, que satisfaz as condições I, II, III enunciadas em (125), então porque existe uma e uma só tal função ψ_n tem-se necessariamente

$$\psi(n) = \psi_n(n). \tag{n}$$

Visto que assim ψ é completamente determinada resulta também que existe uma só tal função ψ (ver a observação final em (130)). Reciprocamente, que a função ψ determinada por (n) também satisfaz as nossas condições I, II, III, resulta facilmente de (n) com respeito às propriedades I, II e (p) mostradas em (125), como se queria provar.

127. Teorema. Sob as hipóteses feitas no teorema precedente, tem-se

$$\psi[T'] = \theta\psi[T],$$

onde T é qualquer parte de N.

Prova. Pois $\psi[T']$ consiste de todos os elementos $\psi(t')$, e $\theta\psi[T]$ de todos os elementos $\theta\psi(t)$, onde t denota um elemento arbitrário de T; o nosso teorema resulta porque, por III em (126), $\psi(t') = \theta\psi(t)$.[53]

128. Teorema. Sob as mesmas hipóteses e designando por θ_O as cadeias (44) que correspondem à função $\theta : \Omega \to \Omega$, tem-se

$$\psi[N] = \theta_O(\omega).$$

Prova. Mostramos primeiro por indução matemática (80) que

$$\psi[N] \subseteq \theta_O(\omega),$$

isto é, que toda a imagem $\psi(n)$ é também elemento de $\theta_O(\omega)$. De facto,

(ρ) este teorema é verdadeiro para $n = 1$, porque por (126, II) $\psi(1) = \omega$, e porque por (45) $\omega \in \theta_O(\omega)$.

(σ) Se o teorema é verdadeiro para um número n, e logo $\psi(n) \in \theta_O(\omega)$, então por (55) também $\theta(\psi(n)) \in \theta_O(\omega)$, isto é, por (126, III) $\psi(n') \in \theta_O(\omega)$, logo o teorema é verdadeiro para o sucessor n', como se queria provar.

---

[53]⟦Como também $\psi(1) = \omega$, podemos dizer, em linguagem algébrica, que ψ é um *homomorfismo* de $(N, \varphi, 1)$ em (Ω, θ, ω).⟧

Com vista a mostrar, além disso, que todo o elemento ν da cadeia $\theta_O(\omega)$ pertence a $\psi[N]$, portanto, que

$$\theta_O(\omega) \subseteq \psi[N],$$

aplicamos semelhantemente indução matemática, isto é, o teorema (59) transferido para Ω e a função θ. De facto,

(ρ) o elemento $\omega = \psi(1)$, logo pertence a $\psi[N]$.

(σ) Se ν é um elemento comum da cadeia $\theta_O(\omega)$ e $\psi[N]$, então $\nu = \psi(n)$, onde n denota um número, e por (126, III) obtemos $\theta(\nu) = \theta\psi(n) = \psi(n')$, logo $\theta(\nu) \in \psi[N]$, como se queria provar.

Dos teoremas acabados de estabelecer, $\psi[N] \subseteq \theta_O(\omega)$ e $\theta_O(\omega) \subseteq \psi[N]$, obtemos por (5) $\psi[N] = \theta_O(\omega)$ como se queria provar.

129. Teorema. Sob as mesmas hipóteses temos em geral:

$$\psi[n_O] = \theta_O(\psi(n)).$$

Prova por indução matemática (80). Pois:

(ρ) Por (128) o teorema vale para $n = 1$, visto que $1_O = N$ e $\psi(1) = \omega$.

(σ) Se o teorema é verdadeiro para um número n, então

$$\theta[\psi[n_O]] = \theta[\theta_O(\psi(n))];$$

visto que, por (127), (75)

$$\theta[\psi[n_O]] = \psi[n'_O],$$

e por (57), (126, III)

$$\theta[\theta_O(\psi(n))] = \theta_O(\theta(\psi(n))) = \theta_O(\psi(n')),$$

obtemos

$$\psi[n'_O] = \theta_O(\psi(n')),$$

isto é, o teorema é verdadeiro para o número n' sucessor de n, como se queria provar.

130. Observação. Antes de passarmos às aplicações mais importantes do teorema de definição por indução demonstrado em (126), (§§10-14), vale a pena chamarmos a atenção para uma circunstância pela qual ele é essencialmente distinto do teorema de demonstração por indução demonstrado em (80), ou melhor, em (59), (60), por muito próximos que possam parecer um do outro. Pois enquanto o teorema (59) é verdadeiro em geral para toda a cadeia A_O, onde A é uma parte qualquer de um conjunto S aplicado em si próprio por uma qualquer função φ (§4), o caso é bastante diferente com o teorema (126), que apenas declara a existência de uma função injectiva (or um-a-um) ψ no conjunto simplesmente infinito 1_O. Se no último teorema (mantendo ainda as hipóteses acerca de Ω e θ) substituirmos o conjunto numérico 1_O por uma cadeia arbitrária A_O obtida de uma parte de um tal conjunto S, definirmos $\psi : A_O \to \Omega$ de maneira análoga à de (126, II, III), e assumindo que

(ρ) a todo o elemento n de A deve corresponder um determinado elemento $\psi(a)$ de Ω, e

(σ) para todo o elemento $n \in A_O$, com imagem $n' = \varphi(n)$, a condição $\psi(n') = \theta\psi(n)$ deve ser satisfeita,

então seria frequente o caso de não existir uma tal função ψ, visto que estas condições (ρ), (σ) podem ser incompatíveis, mesmo que a liberdade de escolha contida em (ρ) seja restringida à partida de maneira a se conformar com a condição (σ). Um exemplo será suficiente para nos convencermos disto. Se o conjunto S consistindo dos elementos diferentes a e b é aplicado em si próprio por ψ tal que $a' = b$, $b' = a$, então obviamente $a_O = b_O = S$; suponhamos além disso que o conjunto Ω consistindo de três elementos diferentes c, d e e é aplicado em si próprio por θ tal que $\theta(c) = d$, $\theta(d) = e$, $\theta(e) = c$; se agora exigirmos uma função ψ de a_O em Ω tal que $\psi(a) = c$, e além disso que para todo o elemento $n \in a_O$ se tem $\psi(n') = \theta\psi(n)$, chegamos a uma contradição; visto que para $n = a$ obtemos $\psi(b) = \theta(c) = d$, e logo para $n = b$, temos $\psi(a) = \theta(d) = e$, quando tínhamos assumido $\psi(a) = c$.

Mas se existe uma função ψ de A_O em Ω, que satisfaz the condições acima (ρ), (σ) sem contradição, então de (60) resulta facilmente que ψ é completamente determinada; pois se a função χ satisfaz as mesmas condições, então temos, em geral, $\chi(n) = \psi(n)$, visto que por (ρ) este teorema é verdadeiro para todos os elementos $n = a \in A$, e visto que se é verdadeiro para um elemento n de A_O, então tem de ser verdadeiro também para a sua imagem n'.

131. Com vista a explicitar claramente a importância do nosso teorema (126), inserimos aqui uma consideração que é útil também noutras investigações, por exemplo, na chamada teoria dos grupos.

Consideramos um conjunto Ω, cujos elementos podem ser combinados de tal modo que de um elemento ν pela acção de um elemento ω, resulta sempre um determinado elemento do mesmo conjunto Ω, que pode ser designado por $\omega \cdot \nu$ ou $\omega\nu$, e em general deve ser distinguido de $\nu\omega$. Podemos também considerar isto de tal modo que a cada elemento determinado ω corresponda uma determinada função do conjunto Ω em si mesmo (a ser designada por $\dot{\omega}$), na medida em que todo o elemento ν fornece a imagem bem determinada $\dot{\omega}(\nu) = \omega\nu$. Se a este conjunto Ω e seu elemento ω aplicarmos o teorema (126), designando por $\dot{\omega}$ a função aí designada por θ, então a todo o número n corresponde um determinado elemento $\psi(n)$ de Ω, que pode agora ser designado pelo símbolo ω^n e é por vezes chamado a n-ésima potência de ω; esta noção é completamente definida pela condições a ela impostas

$$\text{II.} \quad \omega^1 = \omega$$
$$\text{III.} \quad \omega^{n'} = \omega\omega^n,$$

e a sua existência é estabelecida pela prova do teorema (126).

Se a combinação dos elementos acima tiver além disso a propriedade de que para quaisquer elementos μ, ν, ω se tem sempre $\omega(\nu\mu) = (\omega\nu)\mu$, então também são verdadeiros os teoremas

$$\omega^{n'} = \omega^n\omega, \omega^m\omega^n = \omega^n\omega^m,$$

cujas provas podem facilmente ser feitas por indução matemática e podem ser deixadas para o leitor.

A consideração geral precedente pode ser imediatamente aplicada ao seguinte exemplo. Se S é um conjunto de elementos arbitrários, e Ω o conjunto associado cujos elementos são todas as funções ν de S em si próprio (36) ⟦notação: $\Omega = {}^S S$⟧, então por (25) estes elementos podem ser continuamente combinados, visto que $\nu[S] \subseteq S$, e a função $\omega\nu$ composta a partir de tais funções ν e ω é ela própria novamente elemento de Ω. Então também são elementos todas as funções $\omega^n : S \to S$, e dizemos que elas resultam da iteração da função ω. Chamamos agora a atenção para uma conexão simples que existe entre esta noção e a noção de cadeia $\omega_O(A)$ definida em (44), onde A é novamente uma parte qualquer de S. Se para abreviar denotamos por A_n a imagem $\omega^n[A]$ produzida pela função ω^n, então de III e (25) resulta que $\omega[A_n] = A_{n'}$. Mostra-se então facilmente por indução matemática (80) que todos estes conjuntos A_n são partes da cadeia $\omega_O[A]$; pois

(ρ) Por (50) esta afirmação é verdadeira para $n = 1$, e

(σ) se é verdadeira para um número n, então de (55) e de $A_{n'} = \omega[A_n]$ sai que é também verdadeira para o sucessor n', como se queria provar. Como além disso por (45) $A \subseteq \omega_O[A]$, então de (10) resulta que o conjunto K composto a partir de A e todas as imagens A_n é parte de $\omega_O(A)$. Reciprocamente, visto que por (23) $\omega[K]$ é composto a partir de $\omega[A] = A_1$ e todos os conjuntos $\omega[A_n] = A_{n'}$, portanto por (78) a partir de todos os conjuntos A_n, que por (9) são partes de K, então por (10) é $\omega[K] \subseteq K$, isto é, K é uma cadeia (37), e visto que por (9) $A \subseteq K$, então por (47) resulta também que $\omega_O(A) \subseteq K$. Portanto $\omega_O(A) = K$, ou seja, o seguinte teorema é válido: Se $\omega : S \to S$ e $A \subseteq S$, então a cadeia de A correspondente à função ω é composta a partir de A e todas as imagens $\omega^n[A]$ resultantes de iterações de ω ⟦em símbolos,

$$\omega_O(A) = A \cup \bigcup\{\omega^n[A] : n \in N\}⟧.$$

Aconselhamos o leitor munido desta concepção da cadeia a revisitar os teoremas anteriores (57), (58).

§10.
A CLASSE DOS CONJUNTOS SIMPLESMENTE INFINITOS.

132. Teorema. Todos os conjuntos simplesmente infinitos são equipotentes a N e consequentemente por (33) também entre si.

Prova. Seja Ω um conjunto simplesmente infinito ordenado (71) pela função θ, e seja ω o elemento base de Ω assim resultante; se novamente denotarmos por θ_O as cadeias correspondentes à função θ (44), então por (71) tem-se:

(α) $\theta[\Omega] \subseteq \Omega$.

(β) $\Omega = \theta_O(\omega)$.

(γ) $\omega \notin \theta[\Omega]$.

(δ) A função θ é injectiva.

Se então ψ denota a função em N definida em (126), então de (β) e (128) obtemos primeiro

$$\psi[N] = \Omega,$$

e por conseguinte falta apenas mostrar que ψ é injectiva, isto é, (26), que $m \neq n \Rightarrow \psi(m) \neq \psi(n)$. Por razões de simetria podemos por (90) supor que $m > n$, logo $m \in n'_O$, e o teorema reduz-se a provar que $\psi(n) \notin \psi[n'_O]$, e logo por (127) que $\psi(n) \notin \theta\psi[n_O]$. Provamos isto, para todo o número n, por indução matemática (80). De facto:

(ρ) Este teorema é verdadeiro para $n = 1$, por (γ), visto que $\psi(1) = \omega$ e $\psi[1_O] = \psi[N] = \Omega$.

(σ) Se o teorema é verdadeiro para um número n, então é também verdadeiro para o sucessor n'; pois se $\psi(n')$, isto é, $\theta\psi(n)$, pertencesse a $\theta\psi[n'_O]$, então por (δ) e (27), $\psi(n)$ também pertenceria a $\psi[n'_O]$, contra o que afirma exactamente a nossa hipótese; como se queria provar.

133. Teorema. Todo o conjunto que é equipotente a um conjunto simplesmente infinito e, portanto, por (132), (33) a N, é simplesmente infinito.

Prova. Se Ω é um conjunto equipotente a N, então por (32) existe uma injecção ψ definida em N tal que

$$\text{I. } \psi[N] = \Omega;$$

ponhamos então

$$\text{II. } \psi(1) = \omega.$$

Se denotarmos por $\overline{\psi}$ a inversa de ψ, como em (26), que é semelhantemente uma injecção definida em Ω, então a cada elemento ν de Ω corresponde um determinado número $\overline{\psi}(\nu) = n$, *viz.*, aquele número cuja imagem é $\psi(n) = \nu$. Visto que a este número n corresponde um determinado sucessor $\varphi(n) = n'$, e a este novamente um determinado elemento $\psi(n')$ em Ω, vê-se que a cada elemento ν de Ω corresponde um determinado elemento $\psi(n')$ do mesmo conjunto que, como imagem de ν designaremos por $\theta(\nu)$. Assim a função θ de Ω em si próprio é completamente determinada,[54] e para provar o nosso teorema mostraremos que Ω é ordenado por θ (71) como conjunto simplesmente infinito, isto é, que as condições (α)-(δ) enunciadas na prova de (132) são todas satisfeitas. Primeiro, (α) é imediatamente óbvia a partir da definição de θ. Como além disso a todo o número n corresponde um elemento $\nu = \varphi(n)$, para o qual $\theta(\nu) = \psi(n')$, temos em geral,

$$\text{III. } \psi(n') = \theta\psi(n),$$

e logo tendo em conta I, II, (α) resulta que as funções θ, ψ satisfazem todas as condições do teorema (126); portanto (β) resulta de (128) e I. Além disso por (127) e I

$$\psi[N'] = \theta\psi[N] = \theta(\Omega),$$

e logo em combinação com II e a injectividade da função ψ resulta (γ), porque caso contrário $\psi(1)$ estaria em $\psi[N']$, logo por (27) o número 1 estaria em N', que por (71, γ) não é o caso. Se finalmente μ, ν denotam elementos de Ω e m, n os números correspondentes cujas imagens são $\psi(m) = \mu$, $\psi(n) = \nu$, então da hipótese $\theta(\mu) = \theta(\nu)$ resulta pelo que precede que $\psi(m') = \psi(n')$, logo por injectividade de ψ, φ que $m' = n'$, $m = n$, portanto também $\mu = \nu$, logo também (δ) é verdadeiro, como se queria provar.

134. Observação. Pelos dois teoremas precedentes (132), (133) todos os conjuntos simplesmente infinitos formam uma classe no sentido de (34). Ao mesmo tempo, com respeito a (71), (73) é claro que todo o teorema acerca de números, isto é, acerca de elementos n do conjunto simplesmente infinito N ordenado pela função φ, e de facto todo o teorema em que deixamos totalmente fora de consideração a natureza especial dos elementos n e discutimos apenas aquelas noções que resultam da ordenação φ, possui validade perfeitamente geral para qualquer outro conjunto simplesmente infinito Ω ordenado por uma função θ e seus elementos ν, e que a passagem de N a Ω (por exemplo, também a tradução de um teorema aritmético de uma language para outra) é realizada pela função ψ considerada em (132), (133), que aplica cada elemento n de N num elemento ν de Ω, isto é, $\psi(n) = \nu$. Este elemento ν pode ser chamado o n-ésimo elemento de Ω e consonantemente o número n é ele mesmo o n-ésimo número do conjunto N. A significância que a função φ possui para as leis no domínio N, na medida em que todo o elemento n é seguido por um determinado elemento $\varphi(n) = n'$, é a mesma que, após a mudança realizada por ψ, se vai encontrar na função θ para as mesmas leis no domínio Ω, na medida em que o elemento $\nu = \psi(n)$ resultante da mudança de n é seguido pelo elemento $\theta(\nu) = \psi(n')$ resultante da mudança de n'; somos pois justificados em dizer que, mediante ψ, φ é mudada em θ, o que é simbolicamente expresso por $\theta = \psi\varphi\overline{\psi}$, $\varphi = \overline{\psi}\theta\psi$. Creio que por estas observações fica completamente justificada a definição da noção de número dada em (73). Procedemos agora a mais aplicações de teorema (126).

[54] É evidente que θ é a função $\psi\varphi\overline{\psi}$ composta (25) de $\overline{\psi}$, φ, ψ.

§11.
ADIÇÃO DE NÚMEROS.

135. Definição. É natural aplicar a definição (estabelecida no teorema (126)) da função ψ definida no conjunto numérico N (ou da *função* $\psi(n)$ por ela determinada) ao caso em que o conjunto aí designado por Ω que há-de conter o conjunto transformado $\psi[N]$, é o próprio conjunto numérico N, porque para este conjunto Ω a função θ de Ω em si próprio já existe, nomeadamente, a função φ pela qual N é ordenado como conjunto simplesmente infinito (71), (73). Então é também $\Omega = N$, $\theta(n) = \varphi(n) = n'$, logo

$$\text{I. } \psi[N] \subseteq N,$$

e para determinar completamente ψ falta apenas seleccionar ao arbítrio o elemento ω de Ω, isto é, de N. Se tomarmos $\omega = 1$, então é evidente que ψ se torna a função identidade (21) de N, porque as condições

$$\psi(1) = 1, \psi(n') = (\psi(n))'$$

são em geral satisfeitas por $\psi(n) = n$. Se então quisermos produzir outra função ψ definida em N, então para ω temos de seleccionar um número m' diferente de 1, pertencente a N, por (78), onde o próprio m denota qualquer número; visto que a função ψ é obviamente dependente da escolha deste número m, denotamos a imagem correspondente $\psi(n)$ de um número arbitrário n pelo símbolo $m + n$, e chamamos a este número a *soma* que resulta do número m pela adição do número n, ou abreviadamente a soma do números m, n. Portanto, por (126), esta soma é completamente determinada pelas condições[55]

$$\begin{array}{ll} \text{II.} & m + 1 = m', \\ \text{III.} & m + n' = (m + n)'. \end{array}$$

136. Teorema. $m' + n = m + n'$.

Prova por indução matemática (80). Pois:

(ρ) O teorema é verdadeiro para $n = 1$, visto que, por (135, II),

$$m' + 1 = (m')' = (m + 1)',$$

e por (135, III) $(m + 1)' = m + 1'$.

---

[55]A definição acima de adição, baseada imediatamente no teorema (126), parece-me ser a mais simples. Com o auxílio da noção desenvolvida em (131) podemos, todavia, definir a soma $m + n$ por $\varphi_n(m)$ ou também por $\varphi_m(n)$, onde φ tem novamente o sentido anterior. Com vista a mostrar a concordância completa entre estas definições a as precedentes, precisamos por (126) apenas de mostrar que se $\varphi^n(m)$ ou $\varphi^m(n)$ é designado por $\psi(n)$, então as condições $\psi(1) = m'$, $\psi(n') = \varphi\psi(n)$ são satisfeitas, o que se faz facilmente por indução matemática (80) com a ajuda de (131).

(σ) Se o teorema é verdadeiro para um número n, e pomos $n' = p$, então é $m' + n = m + p$, logo também $(m' + n)' = (m + p)'$, logo por (135, III) $m' + p = m + p'$; portanto o teorema é verdadeiro também para o sucessor p de n, como se queria provar.

137. Teorema. $m' + n = (m + n)'$.

A prova resulta de (136) e (135, III).

138. Teorema. $1 + n = n'$.

Prova por indução matemática (80). Pois:

(ρ) Por (135, II) o teorema é verdadeiro para $n = 1$.

(σ) Se o teorema é verdadeiro para um número n e pomos $n' = p$, então $1 + n = p$, portanto também $(1 + n)' = p'$, logo por (135, III) $1 + p = p'$, isto é, o teorema é verdadeiro também para o sucessor p de n, como se queria provar.

139. Teorema. $1 + n = n + 1$.

A prova resulta de (138) e (135, II).

140. Teorema. $m + n = n + m$.

Prova por indução matemática (80). Pois:

(ρ) Por (139) o teorema é verdadeiro para $n = 1$.

(σ) Se o teorema é verdadeiro para um número n, então resulta que também $(m + n)' = (n + m)'$, isto é, por (135, III) $m + n' = n + m'$, logo por (136) $m + n' = n' + m$; portanto o teorema é também verdadeiro para o sucessor n', como se queria provar.

141. Teorema. $(l + m) + n = l + (m + n)$.

Prova por indução matemática (80). Pois:

(ρ) O teorema é verdadeiro para $n = 1$, porque por (135, II, III, II) $(l + m) + 1 = (l + m)' = l + m' = l + (m + 1)$.

(σ) Se o teorema é verdadeiro para um número n, então resulta também $((l + m) + n)' = (l + (m + n))'$, isto é, por (135, III)

$$(l + m) + n' = l + (m + n)' = l + (m + n'),$$

portanto o teorema é também verdadeiro para o sucessor n', como se queria provar.

142. Teorema. $m + n > m$.

Prova por indução matemática (80). Pois:

(ρ) Por (135, II) e (91)o teorema é verdadeiro para $n = 1$.

(σ) Se o teorema é verdadeiro para um número n, então por (95) é também verdadeiro para o sucessor n', porque por (135, III) e (91)

ILUSTRAÇÃO POÉTICA DE UMA CONJECTURA

F. J. Craveiro de Carvalho e J. Nobre Bolito
Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra

A ligação entre a Poesia e a Matemática terá levado à escrita de poemas de grande qualidade, sendo o soneto de Edna St. Vincent Millay cujo primeiro verso é *"Euclid alone has looked on Beauty bare."* um dos mais conhecidos. Mas há outros, naturalmente. Pensemos, por exemplo, em π, de Wislawa Szymborska, ou *Einstein*, de Katharine O'Brien. Num plano mais abstracto, mas igulmente dignos de nota, temos alguns poemas de Jane Hirshfield, como *Mathematics* ou *To Spareness.*

Deixando de lado as lamentações escritas sobre a capacidade de lidar com a Matemática, muitas vezes deparamos com textos *poéticos*, em geral, curtos, caracterizados por algum humor e trazendo consigo algum ensinamento. Despretensiosos, não se lhes pede mais.

Nesta nota o objectivo é apresentar um poema que ilustra uma conjectura matemática conhecida.

1. Pesadelo de um matemático

Pesadelo de um matemático

Imaginemos um armazém de mercadoria variada –
Artigos de valor desconhecido
E preço arbitrário,
Arredondado para facilitar
Para um número de dólares aproximado.

Todos os dias Madame X,
A encarregada,
Sobe ou desce os preços –
Pechinchas extraordinárias
E coisas nada baratas.

Os preços pares
São divididos por dois,
Quanto aos ímpares

Junta-lhes metade –
Mais meio dólar depois
Para manter o preço inteiro.

Hoje paro diante
De um elegante espelho lapidado
À venda por vinte sete dólares.
Compro ou vou esperar
Cinquenta e nove dias
Até ser mais barato?

Trata-se da tradução do poema *A mathematician's nightmare,* de JoAnne Growney, que aparece em [3]. Mesmo tendo em conta que se possa ter perdido algo na tradção, seria claramente excessivo qualificar este poema como uma obra-prima. É um poema curioso, com alguns elementos de estranheza dados pelas referencias a 27 e 59.

Tentar descobrir por que surgem aqueles dois inteiros é, talvez, o caminho mais rico que o poema nos indica.

Segundo a autora, *The price-changing scheme of this poem is derived from a version of the Collatz Conjecture, an unsolved problem that has stolen hours of sleep from many mathematicians.*

E, nesta altura, não tendo um dos autores alguma vez ouvido falar em tal conjectura, aí o temos a tentar descobrir que conjectura é essa, afinal.

2. Lothar Collatz

Lothar Collatz foi um matemático alemão, nascido a 6 de Julho de 1910.

Estudou Matemática e Física nas universidades de Greifswald, Munich, Göttingen e Berlin de 1928 a 1933. Entre outros, foi aluno de Hilbert, Courant e Schur e teve por colegas Richard Brauer, Walter Ledermann e Helmut Wielant.

De 1943 a 1952, foi professor na Technische Hochschule Hannover, tendo em 1952 mudado para a universidade de Hamburg. Fundou aí o, hoje famoso, Institute of Applied Mathematics. Esteve na origem de um dos primeiros centros de computação na Alemanha e reformou-se em 1978. Continuou, contudo, a ensinar até 1990.

Profundamente original e criativo, contribuiu significativamente para todas as áreas da Análise Numérica. Publicou mais de 200 artigos e vários livros sobre problemas de fronteira e de valores próprios, equações diferenciais ordinárias, tratamento numérico de equações diferenciais, análise funcional, optimização e teoria da aproximação [2], [4], [6].

Segundo o *Mathematics Genealogy Project*, terá tido 50 estudantes de doutoramento.

Morreu a 26 de Setembro de 1990, apropriadamente, num simpósio internacional sobre Aritmética Computacional, Computação Gráfica e Modelação Matemática.

A conjectura a que dá o seu nome terá sido formulada na década de trinta do século XX. A sua formulação é a seguinte. Sendo $\mathbb{N}$ o conjunto dos inteiros positivos, definamos $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ por

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \textit{se } n \textit{ é par} \\[2ex] 3n+1 & \textit{se } n \textit{ é ímpar} \end{cases}$$

Se $n_0 \in \mathbb{N}$ for qualquer e considerarmos a sequência, $n_0, f(n_0), f^2(n_0), f^3(n_0), \ldots$, onde f^k designa a composição $f \circ \ldots \circ f$, sendo f considerado k vezes, o inteiro 1 acabará por figurar na sequência.

A conjectura continua em aberto e, sobre ela, Paul Erdös disse:

"Mathematics is not yet ready for such confusing, troubling, and hard problems."
tendo oferecido um prémio de 500 dólares americanos pelo estabelecimento da sua veracidade ou falsidade [Collataz conjecture, Wikipedia]. Antes, H. S. M. Coxeter oferecera 50 e, posteriormente, B. Thwaites propôs 1000 [7].

Por volta de 1960, S. Kakutani fez circular a conjectura entre várias pessoas, tendo afirmado:

"For about a month everybody at Yale worked on it, with no result. A similar phenomenon happened when I mentioned it at the University of Chicago. A joke was made that this problem was part of a conspiracy to slow down mathematical research in the U. S.".

Por outro lado, Richard K. Guy menciona-a no seu artigo *"Don't try to solve these problems"* [5].

Ligado, significativamente, a ela está o nome do português Tomás Oliveira e Silva [Collataz conjecture, Wikipedia].

3. Riho Terras

Na verdade, o poema de Growney não se refere à conjectura de Collatz, mas a uma sua versão dita *"mais económica"*, descrita por R. Terras em [9]. Neste caso, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é dada por

$$f\left(n\right) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \textit{se n é par} \\ \\ \dfrac{3n+1}{2} & \textit{se n é ímpar} \end{cases}$$

De Riho Torres, sabemos pouco. Nasceu na Estónia, em 13 de Junho de 1939, e morreu na Califórnia, em 28 de Novembro de 2005.

Foi o vencedor, em 1965, do *Abramowitz Award* da University of Maryland, um prémio destinado a *"...a student majoring in mathematics who has demonstrated superior competence and promise for future development in the field of mathematics and its applications.",* tendo, no ano seguinte, esse prémio sido atribuído a Charles Fefferman, um futuro vencedor da *Medalha Fields.*

Doutorou-se na University of Illinois, Urbana-Champaign, em 1970, sendo *"Almost Automorphic Functions on Topological Groups"* o título da sua dissertação de doutoramento. I. David Berg foi o seu orientador e considerava-o *"a promising research student"* [1].

Foi professor na University of California, La Jolla, California, tendo a sua produção científica sido relativamente modesta.

Ainda segundo o *Mathematics Genealogy Project,* não terá tido estudantes de doutoramento.

4. A conjectura e o poema

O pequeno programa abaixo, em linguagem C, permite calcular as iterações sucessivas, a partir de um inteiro positivo qualquer, até, eventualmente, se obter 1.

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

long int collatz(long int n)
{
  FILE* result = fopen("sequence.txt", "w");
  long int fn, i;
  fprintf(result, "{%ld, ", n);
  if(result)
  {
    for(fn = n, i = 0; fn != 2; i++)
    {
      if(!(fn % 2))
        fn /= 2;
      else
        fn = (3*fn+1)/2;

      fprintf(result, "%ld, ", fn);
    }
    fprintf(result, "1}");
    fclose(result);
    i++;
  }
  else
  {
    printf("Erro de escrita de ficheiro!\n");
    exit(EXIT_SUCCESS);
  }
  return i;
}

int main()
{
  long int n, it;
  printf("Programa para calcular a sucessao de Collatz de um
dado
inteiro positivo\n\nIntroduza um numero inteiro positivo: ");
  scanf("%ld", &n);
  it = collatz(n);
  printf("\nNumero de iteracoes: %ld\nA sequencia de Collatz
de %ld
foi guardada no ficheiro sequence.txt\n\n", it, n);
  return EXIT_SUCCESS;
}
```

Assim, começando com $n = 13$, temos a sequência $\left\{13,20,\ 10,\ 5,\ 8,\ 4,\ 2,\ 1\right\}$.

Para $n = 231$, obtemos $\Big\{$ 231, 347, 521, 782, 391, 587, 881, 1322, 661, 992, 496, 248, 124, 62, 31, 47, 71, 107, 161, 242, 121, 182, 91, 137, 206, 103, 155, 233, 350, 175, 263, 395, 593, 890, 445, 668, 334, 167, 251, 377, 566, 283, 425, 638, 319, 479, 719, 1079, 1619, 2429, 3644, 1822, 911, 1367, 2051, 3077, 4616, 2308, 1154, 577, 866, 433, 650, 325, 488, 244, 122, 61, 92, 46, 23, 35, 53, 80, 40, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1 }.

Finalmente, para $n = 27$, { 27, 41, 62, 31, 47, 71, 107, 161, 242, 121, 182, 91, 137, 206, 103, 155, 233, 350, 175, 263, 395, 593, 890, 445, 668, 334, 167, 251, 377, 566, 283, 425, 638, 319, 479, 719, 1079, 1619, 2429, 3644, 1822, 911, 1367, 2051, 3077, 4616, 2308, 1154, 577, 866, 433, 650, 325, 488, 244, 122, 61, 92, 46, 23, 35, 53, 80, 40, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1 } vendo-se que só após 59 iterações se obtém um inteiro inferior a 27.

No poema de JoAnne Growney, cada iteração é um dia e, apenas após 59 dias, é que o preço do espelho é inferior a 27 dólares.

5. Os problemas gémeos

Os problemas gémeos da Conjectura de Collatz e da versão dita *"mais económica"* [8] consistem em definir $f\left(n\right)$ usando $3n-1$ em vez de $3n+1$. Para um tal *f*, a sequência de iterações não conduz necessariamente a 1.

Por exemplo, na versão *"mais económica"*, começando com $n = 5$, obtemos

$\left\{5,\ 7, 10,\ 5,\ ...\right\}$

e, para $n = 17$, vamos ter

$\left\{17, 25,\ 37,\ 55,\ 82,\ 41,\ 61,\ 91,\ 136,\ 68,\ 34,\ 17,\ ...\right\}$

As sequências $\left\{5,\ 7, 10\right\}$ e $\left\{17, 25,\ 37,\ 55,\ 82,\ 41,\ 61,\ 91,\ 136,\ 68,\ 34\right\}$ são exemplos de *ciclos*. Mais formalmente, supondo que começamos com n_0, um ciclo da sequência $n_0, f\left(n_0\right), f^2\left(n_0\right), f^3\left(n_0\right), \ldots,$ é uma sequência finita, digamos $f^k\left(n_0\right), f^{k+1}\left(n_0\right), \ldots f^r\left(n_0\right)$, sem elementos repetidos e tal que $f^k\left(n_0\right) = f^{r+1}\left(n_0\right)$.

Em **http://www.mat.uc.pt/~mat0707/programas** está um programa que procura, dado um L, detectar, para cada $n \leq L$, a existência de um $m_0 \leq n$ que seja o menor elemento de um ciclo.

REFERÊNCIAS

[1] I. David Berg, comunicação particular.

[2] L. Elsner and K. P. Hadeler, *Lothar Collatz - On the occasion of his 75th birthday,* Linear Algebra Appl., 68 (1985) 1-8.

[3] JoAnne Growney, My Dance is Mathematics, Paper Kite Press, 2006.

[4] Ronald B. Guenther, *Lothar Collatz, 1910-1990, Obituary,* Aequationes Mathematicae, 43 (1992) 117-119.

[5] Richard K. Guy, *Don't try to solve these problems!*, Amer. Math. Monthly, 90 (1983) 35-41.

[6] Günter Meinardus and Günther Nurnberger, *In Memoriam, Lothar Collatz*, J. Approx. Theory, 65 (1991) 1-2.

[7] Jeffrey C. Lagarias, *The 3x+1 problem and its generalizations,* Amer. Math. Monthly, 92 (1985) 3-23.

[8] Daniel A. Rawsthorne, *Imitation of an iteration*, Math. Mag., 58 (1985) 172-176.

[9] R. Terras, *A stopping time problem on the positive integers*, Acta Arith., 30 (1976) 241-252.

GEOMETRIA ELEMENTAR

Acto de medir e o Conceito de unidade

Carlos Pereira dos Santos
ISEC

Figura 1: Medições no primeiro livro de Singapura

Este artigo começa com duas gravuras retiradas de uma página do primeiro livro de matemática do ensino de Singapura. Trata-se exactamente do tema que fez nascer a geometria: o acto de medir.

A própria palavra geometria indica essa origem. Em grego geo significa terra e metria significa medida, ou seja, geometria significa «medir a terra».

Provavelmente, a agricultura e aspectos relacionados com a delimitação de terrenos estão na base da sua origem.

Sendo assim, a forma mais natural para iniciar as crianças na geometria, tal como de iniciar esta sequência de artigos, consiste na análise dos traços fundamentais relacionados com o acto de medir e com o conceito de unidade.

A primeira ideia chave é a seguinte:

Medir consiste em comparar duas grandezas da mesma espécie.

Apesar da simplicidade que uma frase como esta parece ter, o seu conteúdo é mais vasto e muito mais abstracto do que parece. Uma pergunta ocorre e a resposta não é nada fácil, *o que é uma grandeza?* A resposta formal a uma questão como esta é contra-producente para crianças dos primeiros anos de escolaridade. As crianças já trazem consigo um conhecimento experimental de muitas grandezas tais como comprimento, peso, etc. O que parece ser um bom caminho para pais, educadores e professores é o frisar da necessidade da **mesma natureza** para se fazer comparações (frisar bem!). Nós comparamos comprimentos de dois objectos, nós comparamos pesos de dois objectos, etc. Nós *não* medimos o peso de um objecto com o comprimento de outro. Podemos procurar relacionar de alguma maneira grandezas distintas, mas não é assunto para os primeiros passos de uma criança e não se trata de uma medição directa.

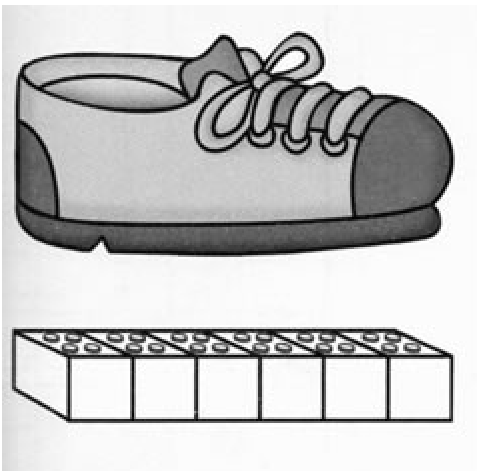


Figura 2: Medições no pré-escolar

A outra face da ideia de medição aparece quando se diz que medir é comparar. É aqui que aparecem os números e a matemática. Na imagem exposta, retirada de um livro do pré-escolar do ensino de Singapura, transparece que o comprimento da sola do sapato corresponde ao comprimento de seis peças de lego. Repare-se que a questão da natureza comum já foi ultrapassada, nós estamos a admitir que tanto as peças de lego como a sola do sapato têm associado a si um comprimento. Neste caso é o comprimento a grandeza comum que nos está a interessar. Mas estamos a fazer mais do que a mera identificação de uma natureza comum: estamos a **quantificar uma comparação**. Estamos a dizer algo do tipo (ignorando o calão), *cabem 6 peças de lego na sola do sapato*. Uma medição está muitas vezes associada à questão **quantas vezes cabe?** Veremos mais à frente que esta questão tem alguns perigos que devem ser do conhecimento de pais, educadores e professores.

Nos primeiros passos que uma criança dá na geometria, parece saudável fazerem-se medições utilizando grandezas "palpáveis". **As primeiras grandezas escolhidas devem ter um carácter sensorial.** *Comprimento* (as crianças estão habituadas a ter amigos mais baixos, amigos mais altos, etc), *peso* (as crianças conseguem levantar uma coisa leve e não têm força para uma pesada), *capacidade* (as crianças despejam facilmente um certo número de copos com água numa tina vazia). Devemos evitar nos primeiros tempos grandezas demasiado abstractas. Nada como as crianças *sentirem fisicamente* a grandeza.

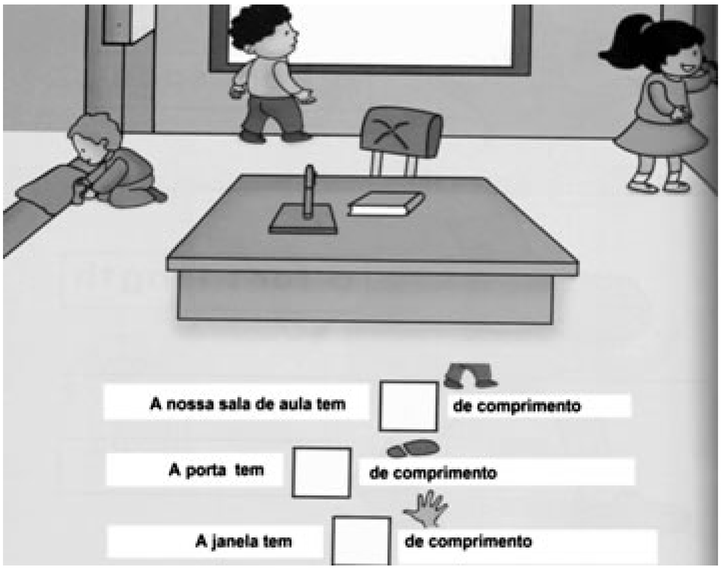


Figura 3: Medições na sala de Aula

A compreensão da experiência de medição é essencial para a aprendizagem da geometria. Essa aprendizagem não poderá ser bem sucedida se esta fase for mal ultrapassada.

O conceito de medição leva inevitavelmente ao conceito de unidade. Uma vez que uma medição não é mais do que uma comparação, podemos atribuir o **estatuto de unidade** a um dos objectos em causa na comparação. Por exemplo, se na figura relativa à medição do comprimento da sola do sapato considerarmos como unidade o comprimento da peça de lego, a sola mede 6 unidades. Uma ideia absolutamente basilar é a seguinte:

A unidade é escolhida por nós!

Não faz sentido dizer que o tampo de uma mesa mede 45 se não estiver bem esclarecida a unidade escolhida para fazer uma afirmação destas. Esta ideia é fundamental e tem de passar para as crianças. Na figura 3, é ilustrado um quadro muito interessante em que são estipuladas várias unidades e as crianças fazem medições baseadas nessas unidades. Nas primeiras medições as crianças poderão utilizar unidades mundanas como paus de gelado ou peças de lego. Isso permitirá enfatizar a importância da sua escolha.

Figura 4: Pesagens

Se repararmos na figura 4, actividade retirada de livro organizado para o sistema pré-escolar de Singapura, ainda podemos constatar outro pormenor interessante: as mesmas peças de lego utilizadas para medir comprimentos estão a ser usadas como unidade para a determinação do peso de alguns objectos. Este exemplo é interessante pois mostra às crianças que *o mesmo objecto pode estar associado a muitas grandezas diferentes.*

Actividades envolvendo medições poderão conduzir a outro conceito muito importante:

A unidade deve servir a comunicação entre as pessoas.

Numa actividade em que as crianças efectuem medições de comprimentos tomando como unidade o palmo, é inevitável que apareçam problemas de comunicação. O que para uns é um palmo, para outros será palmo e meio. Os palmos não são todos iguais! É aqui que pais, educadores e professores deverão frisar a importância de se escolherem unidades comuns e conhecidas por todos. Nos primeiros tempos não será necessário referir unidades standard como o metro, o grama, o litro, etc, mas pelo menos deverá ser explicado que para efeitos de comunicação e para que se possam fazer comparações, toda a turma deve usar a mesma unidade, o mesmo tipo de pau de gelado, o mesmo padrão de peça de lego.

Também será de aproveitar as actividades de medição para transmitir que

As unidades tendencialmente satisfazem critérios práticos.

Não faz muito sentido falar da distância de Lisboa-Porto em milímetros. Também não é grande coisa falar de dosagens de medicamentos em toneladas. As pessoas que orientam as actividades poderão debater com as crianças sobre a peça de lego que *parece mais indicada* para servir de unidade para medir determinado comprimento. Indicada no sentido prático da questão.

(CONTINUA)

O BARALHO PEDAGÓGICO DE DESCARTES

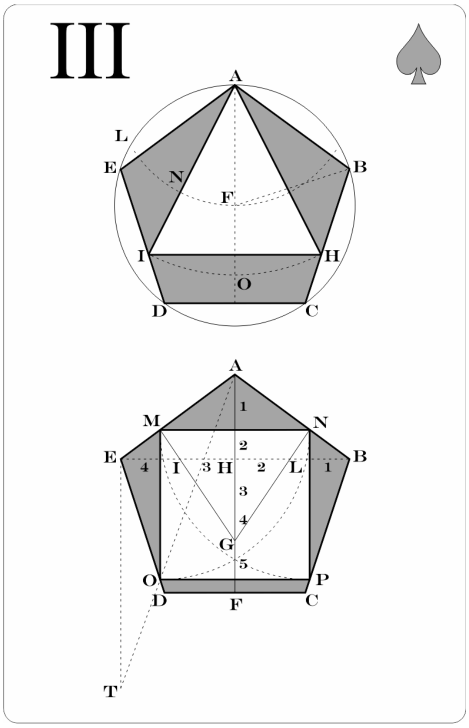
Marisa Ferreira

Três de espadas

No Terno de Espadas Descartes dá seguimento à carta anterior (Duque de Espadas). Nesta carta apresenta duas novas *Proposições* e respectivas construções geométricas que explicam como inscrever um polígono regular noutro polígono, neste caso, num pentágono.

PROPOSIÇÃO XIV: *Inscrever um triângulo equilátero num pentágono.*

PROPOSIÇÃO XV: *Inscrever um um quadrado num pentágono.*



Índice