Ano 25º | Lisboa, Setembro 2009 | Nº 278

Jornal de Mathemática Elementar

Endereço de Email
jme@spm.pt

PUBLICAÇÃO MENSAL

Director Honorário: Sérgio Macias Marques

Director: Jorge Nuno Silva

Preço: ***1,80€*** **(IVA incluído)**

Um estudo de história da matemática em Portugal recebeu um prémio internacional muito importante.

Parabéns ao Bernardo Mota e aos seus orientadores.

Convidamos os leitores do JME a lerem a entrevista com o contemplado na página 16.

Jorge Nuno Silva

FICHA TÉCNICA

Registo nº 110029-ISSN 1646-978X
Nº Contribuinte 501065792
Impressão Repro 2000
Tiragem 1000 exemplares
Redacção e Administração
SPM. Av. da República, 45-3º
1050-187 LISBOA
Tel. 217 939 785

GALERIA DE MATEMÁTICOS

Paulo Almeida

Vicente Gonçalves:

antigo e moderno

Na minha terra, onde há um rio em que se pesca, havia um pescador que ao contrário dos demais, que seguiam os cardumes arrastados pelo rio, e apesar de conhecer as artes da pesca de corrente, ia a montante, preferindo ao peixe dos cardumes o salmão, solitário como ele, na procura do oxigénio das fontes. Nesta parábola, naturalmente, o salmão é a matemática de cunho clássico, os cardumes a jusante os modismos científicos e o pescador solitário: Vicente Gonçalves.

José Vicente Gonçalves (1896–1985) desempenhou no panorama matemático português o papel singular de quem, apesar de conhecedor das grandes correntes de pensamento matemático do seu tempo, fez a sua própria opção conforme ao seu estilo, criando matemática, indiferente às modas cujo temário porém bem conhecia, melhor quiçá que a maioria dos que as seguiam. Era admirador sim dos antigos e do antigo mas não só conhecedor dos modernos como praticante a seu modo da modernidade. Figuras assim serão singulares no seu tempo mas têm uma natureza universal ao longo dos tempos. Por serem raras temos o sentimento que delas carecemos.

Vicente Gonçalves, antigo e moderno, porquê?

Nas lições proferidas em Coimbra em 1928/29 Vicente Gonçalves aborda a Teoria dos Conjuntos, e os números transfinitos, tema que "teve as primícias no nosso ensino, em seus aspectos elementares, por iniciativa do Professor Pedro José da Cunha [...] [que foi] quem, pela primeira vez entre nós, investigou naquele domínio" num trabalho de 1922[1], "trata sucintamente de curvas de Jordan e curvas de Peano, trata também de teoria da medida à Jordan, põe em relevo a sua insuficiência e faz uma abordagem à teoria da medida à Lebesgue"[2] o que suscitaria grande apreço da parte do então aluno Ruy Luís Gomes[3]; é de 1928 o artigo de Gonçalves "Sur la Courbe de von Koch", que para além da de Peano, era novidade na época e ainda hoje é tema de modernidade no quadro da teoria dos fractais. Nessas lições em Coimbra eram expostos os então recentes trabalhos de Levi-Civita sobre cálculo tensorial não perdendo Vicente Gonçalves o ensejo de divulgar os recentíssimos de Mira Fernandes, com aceitação entusiástica dos alunos[4]. Estes exemplos serão suficientes para assinalar a "preocupação constante em actualizar os cursos que Vicente Gonçalves ministrava"[5], preocupação que viria a ser patente nas aulas de modo mais subtil, quando ao assumir de tal modo deliberadamente um gosto pelo

---

[1] Nas palavras de J.J. Dionísio, "Aspectos do Ensino Matemático na Escola Politécnica-Faculdade de Ciências", em *Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, Passado/Presente, Perspectivas Futuras,* 1987, a propósito de uma exposição comemorativa do 150º aniversário da Escola Politécnica e do 75º aniversário da Faculdade de Ciências.

[2] José Morgado, "O Professor Ruy Luís Gomes e o Movimento Matemático Português", *Anais da Fac. de Ciências do Porto*, 67, 97 (1986), Porto, 1991.

[3] José Morgado, *op. cit.*

[4] Conforme refere J. Tiago de Oliveira no seu "Elogio Histórico de Vicente Gonçalves", *Mems. da Academia das Ciências de Lisboa*, Ciências, XXVII, 1986 (incluído em J. Tiago de Oliveira, Obras, vol. II, Pendor, Évora, 1995), remetendo por seu lado para o "Elogio Histórico de Aureliano Lopes de Mira Fernandes", proferido por José Francisco Ramos e Costa e contido nas *Mems. da Academia das Ciências de Lisboa*, Ciências, IX, 1966. O entusiasmo dos alunos e de Vicente Gonçalves foi tal que enviaram um telegrama de felicitações a Mira Fernandes tendo este respondido com a oferta a cada estudante de um exemplar de uma obra sua de 1927 que será porventura o primeiro texto português dedicado por inteiro à geometria diferencial: *Geometria Diferencial dos Espaços Lineares.*

[5] José Morgado, *op. cit.*

clássico poderia induzir em erro quanto ao seu falso distanciamento com o conhecimento do moderno.

Com verve irónica, ao ser perguntado sobre o que pensava da famosa escola matemática francesa acobertada sob o nome de Nicolas Bourbaki respondeu a um aluno[6]: "nada sei de filosofia!" embora os fascículos do monumental tratado bourbakista fossem por ele minuciosamente compulsados[7]. Como se sabe a escola Bourbaki surgiu nos meados dos anos trinta deste século como reacção à influência de certa escola alemã decimonónica – que não a de Hilbert e de Emmy Noether – e de certa escola francesa; ora Vicente Gonçalves sempre teve as escolas alemãs como grande referência esquecendo-as na verbosidade que incomodou os jovens bourbakistas – sem sacrificar, ao contrário destes que se queriam "puros", o estilo literário – e imitando-as contudo onde prevalecesse a excelência do rigor.

As opções de inflexão clássica eram claramente perceptíveis no seu magistério e pudicas as rejeições de certos assuntos cujo modernismo se pudesse confundir com modismo: o exemplo por excelência era o "axioma da escolha"; ao mostrar que a continuidade pontual de uma função no sentido de Cauchy se traduzia em termos de sucessões, *à la* Heine, comentava Gonçalves aos alunos do primeiro ano da Faculdade de Ciências de Lisboa: "outros nesta casa provariam a recíproca, rapidamente e sem escolhos", em manifesta alusão aos que aceitavam o axioma da escolha, embora aos ingénuos alunos daquele ano de 1964 o comentário parecesse críptico; mas foi ao inquiri-lo sobre o mistério, que ouvimos falar pela primeira vez, num luxo de informação, nos nomes de Zermelo, Fraenkel e Zorn.

Vicente Gonçalves sabia como era difícil conceber uma ideia nova, e como eram raras essas ideias, porque tinha o hábito de lhes escrutar o fio da genealogia e desconfiava das torrentes de ideias apresentadas como novas por quem não lhes consagrou um estudo que assinalasse um berço antigo; à alegria fácil do espectáculo enfarpelado preferia a serena, árdua e subtil subida à nudez das fontes. Quantos dos que foram seus alunos não descodificariam assim o seu comentário frequente: "Não vale a pena abrir portas abertas"!

Assinale-se que a sua preocupação em compulsar as fontes quanto possível deve entender-se até no sentido físico: lembro-me de Vicente Gonçalves ter mostrado entusiasmado aos seus alunos um exemplar de uma obra de Rolle, datada do século XVII, que comprara num alfarrabista – e à qual, dizia, não faltavam certas páginas,

[6] José Manuel Ferreira.

[7] Conforme nos revelou António Luís Botelho Chichorro Marcão, professor de matemática e sobrinho de Vicente Gonçalves.

como nos poucos exemplares alhures descritos; não o podia imaginar nessa altura, mas talvez fosse esse um dos espécimenes que Vicente Gonçalves cuidadosamente lavava, envolto em alguidares, e mesas com cadernos de livros esventrados, a secar, sujeitos às exigências de preservação do bibliófilo que era[8].

Para a última geração dos seus alunos[9] era por demais evidente o apreço que manifestava pela forma clássica de fazer matemática ainda que tratando temas modernos; ao não conseguir um aluno[10] dirimir certa dúvida após ter consultado um livro de Calderón e Zygmund sobre séries trigonométricas exclamou entusiástico Vicente Gonçalves classificando aquele clássico-moderno: "Ah! meu caro senhor, é obra de salão!!"

Mestre na invectiva cáustica e demolidora, balizava o terreno em que queria ou não mover-se. No rescaldo de uma prova académica prestada por José Sebastião e Silva, não se coíbe de dizer em privado: "em terreno arado de fresco até as galinhas apanham minhocas"[11]; independentemente da sincera opinião encomiástica que viria a ter sobre aquele que foi sem dúvida o mais notável matemático português deste século e denotando talvez um lamento pelos "modernismos" de Sebastião e Silva, citado generosamente aos 36 anos – por trabalhos de índole clássica – no curso de Álgebra Superior publicado por Vicente Gonçalves, antes de Silva ganhar notoriedade com os seus artigos sobre funcionais analíticas e a teoria das distribuições.

A atitude de, digamos, conservadorismo sustentado, tinha algo de pedagógico em Vicente Gonçalves, avesso como era às conclusões precipitadas e aos juízos fáceis que abundavam e abundam. Como interpretar o seu comentário crítico a propósito de uma interpretação mais ligeira de Stocker denunciada numa detalhada análise de Gonçalves: "Pormenores? Pormenores insignificantes? Mas como se há-de ajuizar do abatimento da nossa cultura matemática sem contrastar o escrúpulo dos que dela escreveram [...]"[12]. (CONTINUA)

---

[8] António Manuel Botelho Hespanha, sobrinho de Vicente Gonçalves, confiou-me a memória que guarda do seu tio em pleno trabalho de recuperação física de livros.

[9] No seu último ano de docência (1965/66) Vicente Gonçalves tinha um aluno dilecto: Joaquim Baptista; ambos lhe fomos pedir, já depois de jubilado, para dar uma série de lições sobre a teoria da medida na recta real; o Mestre acedeu, expondo com inolvidável elegância os finíssimos teoremas de Egorov, Luzin e Suslin.

[10] Mário Figueira.

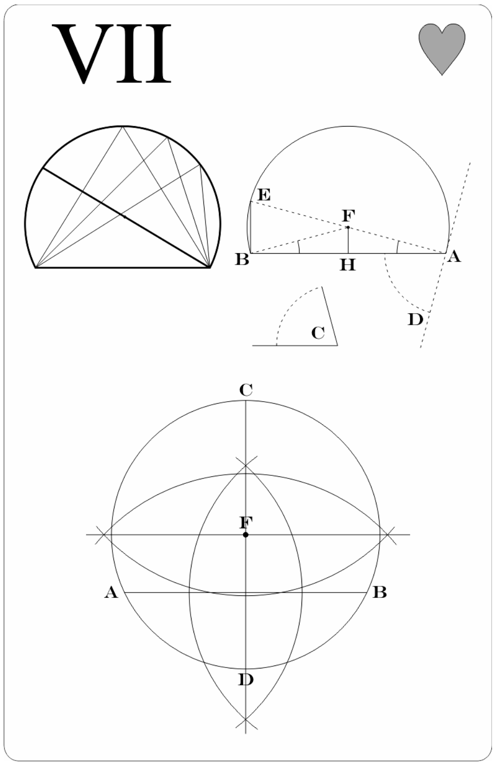
[11] Episódio relatado pelo saudoso João dos Santos Guerreiro e confirmado por outras pessoas; em mais de uma ocasião foi porém lançado o ditirambo.

[12] J. Vicente Gonçalves, "Elogio Histórico de Pedro José da Cunha", Mems. da Academia das Ciências de Lisboa, Ciências, IX, 1966.

O BARALHO PEDAGÓGICO DE DESCARTES

Marisa Ferreira

Descartes, com o Sete de Copas, oferece-nos duas novas Proposições, a primeira relacionada com a construção de uma porção de um círculo e a segunda com a determinação do centro de um círculo dado:



Proposição VIII: *Sobre uma linha recta dada descrever uma porção de um círculo, definindo um ângulo igual a um ângulo dado.*

Proposição IX: *Encontrar o centro de um círculo dado.*

O método de Hondt e os círculos eleitorais

Carla Cardoso
EBI Quinta do Conde

No JME de Novembro/Dezembro de 2008 falou-se de métodos eleitorais proporcionais, ou seja, diferentes formas de distribuir proporcionalmente os lugares em disputa após os votos conseguidos por cada partido, ou candidato, num acto eleitoral.

No presente artigo proponho uma breve passagem pelos métodos proporcionais mais conhecidos (Adams, Hondt, Hill, Webster e Hamilton) e algumas considerações sobre a realidade portuguesa num momento em que recebemos um importante acto eleitoral: as eleições legislativas.

A Lei n.º 14/79 de 16 de Maio, no artigo 13º, prevê a utilização do método de Hondt na determinação do número de deputados a eleger por cada um dos círculos eleitorais portugueses (bem como na conversão de votos em mandatos, perante os resultados do acto eleitoral). Podem resumir-se as etapas do método de Hondt como no artigo 16º da mesma Lei:

a) Apura-se em separado o número de votos recebidos por cada lista no círculo eleitoral respectivo;
b) O número de votos apurados por cada lista é dividido, sucessivamente, por 1, 2, 3, 4, …, sendo os quocientes alinhados pela ordem decrescente da sua grandeza numa série de tantos quantos os mandatos atribuídos ao círculo respectivo;
c) Os mandatos pertencem às listas a que correspondem os termos da série estabelecida pela regra anterior, recebendo cada uma das listas tantos mandatos quantos os seus termos da série;
d) No caso de restar um só mandato para distribuir e de os termos seguintes da série serem iguais e de listas diferentes, o mandato cabe à lista que tiver obtido menos número de votos.

Proponho uma comparação entre as distribuições obtidas pelo método de Hondt, legalmente estabelecido, e as distribuições produzidas pelos restantes métodos. Conforme veremos há diferenças dignas de nota…

De acordo com o disposto no Mapa Oficial n.º 2/2009, publicado pela Comissão Nacional de Eleições no Diário da República de 31 de Julho, o número de deputados a eleger no acto eleitoral de 2009 para a Assembleia da República será, em função dos círculos eleitorais:

Círculos Eleitorais	**Número de eleitores**	**Número de deputados**
Aveiro	642491	16
Beja	138060	3
Braga	760474	19
Bragança	155894	3
Castelo Branco	193480	4
Coimbra	392836	10
Évora	147444	3
Faro	350777	8
Guarda	175130	4
Leiria	419988	10
Lisboa	1852123	47

Portalegre	108455	2
Porto	1546682	39
Santarém	403277	10
Setúbal	697331	17
Viana do Castelo	255034	6
Vila Real	235562	5
Viseu	380941	9
Açores	216245	5
Madeira	251465	6
Europa	72550	2
Fora da Europa	94441	2
Total	9490680	230

É de notar que a aplicação directa o método de Hondt atribuía ao círculo da Europa apenas um deputado, e seis ao círculo de Vila Real. No entanto, a Lei n.º 14/79 de 16 de Maio, no segundo ponto do artigo 13º determina que o círculo europeu tenha dois deputados, pelo que é necessário fixar este valor. Perante tal realidade, aplicando novamente o método de Hondt, é Vila Real quem perde um deputado.

O método de Hondt é equivalente ao método de Jefferson, que, a par de Adams, Hill e Webster, fazem parte do grupo dos métodos de divisor. Estes métodos prevêem a adopção de um divisor comum que, aplicado ao número de votos obtido por cada candidato, produzirá quocientes. Perante estes quocientes os autores propõem diferentes formas de aproximação às unidades, de modo a proporcionar a distribuição dos lugares a concurso. Jefferson propõe que a aproximação seja feita por defeito, Adams por excesso; Webster aponta o arredondamento convencional (por defeito se a parte não inteira for inferior a 0,5, por excesso caso contrário); Hill sugere que se use a média geométrica dos dois valores inteiros que enquadram o quociente como ponto de viragem para a aproximação (o quociente será aproximado por defeito se for inferior à média geométrica dos dois inteiros, será aproximado por excesso caso contrário).

Resultados mediante a aplicação do método de Hondt (aqui tratado seguindo o algoritmo de Jefferson, que facilita bastante os cálculos):

Círculos Eleitorais	Número de eleitores	Quociente (com divisor 39000)	Distribuição de Deputados
Aveiro	642491	16,474	16
Beja	138060	3,540	3
Braga	760474	19,499	19
Bragança	155894	3,997	3
Castelo Branco	193480	4,961	4
Coimbra	392836	10,073	10
Évora	147444	3,781	3
Faro	350777	8,994	8
Guarda	175130	4,491	4
Leiria	419988	10,769	10
Lisboa	1852123	47,490	47
Portalegre	108455	2,781	2
Porto	1546682	39,659	39
Santarém	403277	10,340	10
Setúbal	697331	17,880	17
Viana do Castelo	255034	6,539	6
Vila Real	235562	6,040	6
Viseu	380941	9,768	9
Açores	216245	5,545	5
Madeira	251465	6,448	6
Europa	72550	1,860	1
Fora da Europa	94441	2,422	2
Total	**9490680**	**243,351**	**230**

Aplicação do método de Adams:

Círculos Eleitorais	Número de eleitores	Quociente (com divisor 43500)	Distribuição de Deputados
Aveiro	642491	14,770	15
Beja	138060	3,174	4
Braga	760474	17,482	18
Bragança	155894	3,584	4
Castelo Branco	193480	4,448	5
Coimbra	392836	9,031	10
Évora	147444	3,390	4
Faro	350777	8,064	9
Guarda	175130	4,026	5
Leiria	419988	9,655	10
Lisboa	1852123	42,578	43
Portalegre	108455	2,493	3
Porto	1546682	35,556	36
Santarém	403277	9,271	10
Setúbal	697331	16,031	17
Viana do Castelo	255034	5,863	6
Vila Real	235562	5,415	6

Viseu	380941	8,757	9
Açores	216245	4,971	5
Madeira	251465	5,781	6
Europa	72550	1,668	2
Fora da Europa	94441	2,171	3
Total	**9490680**	**218,177**	**230**

Um breve olhar sobre os resultados para a distribuição dos deputados mostra-nos o que os estudos teóricos nos dizem: o método de Adams tende a favorecer os círculos com valores populacionais mais baixos, ao passo que Jefferson atribui maior força aos círculos com mais eleitores. Esta situação é evidente ao verificarmos que, apenas nos círculos de Lisboa e Porto, o método de Adams propõe 7 deputados a menos que Hondt (ou Jefferson); em oposição, Beja, Bragança, Évora e Portalegre obteriam, cada um, um deputado extra.

Na realidade, a escolha política do método de Hondt como oficialmente válido tem muito a ver com esta sua característica de atribuir maior peso ou representatividade aos concorrentes mais fortes: é a estabilidade política de todo um sistema democrático que é aqui valorizada, em detrimento de flutuações que podiam tornar-se perigosas. Naturalmente, esta postura acaba por abafar correntes de pensamento que tentam assumir uma posição distinta ou marcar a diferença.

Vejamos os resultados produzidos pelos restantes métodos: Webster, Hill e Hamilton.

Método de Webster:

Círculos Eleitorais	Número de eleitores	Quociente (com divisor 41300)	Distribuição de Deputados
Aveiro	642491	15,557	16
Beja	138060	3,343	3
Braga	760474	18,413	18
Bragança	155894	3,775	4
Castelo Branco	193480	4,685	5
Coimbra	392836	9,512	10
Évora	147444	3,570	4
Faro	350777	8,493	8
Guarda	175130	4,240	4
Leiria	419988	10,169	10
Lisboa	1852123	44,846	45
Portalegre	108455	2,626	3
Porto	1546682	37,450	37
Santarém	403277	9,765	10
Setúbal	697331	16,885	17
Viana do Castelo	255034	6,175	6

Vila Real	235562	5,704	6
Viseu	380941	9,224	9
Açores	216245	5,236	5
Madeira	251465	6,089	6
Europa	72550	1,757	2
Fora da Europa	94441	2,287	2
Total	**9490680**	**229,799**	**230**

Método de Hill:

Círculos Eleitorais	Número de eleitores	Quociente (com divisor 41400)	Quo. Def.	Quo. Exc.	Média geom.	Distribuição de Deputados
Aveiro	642491	15,519	15	16	15,492	16
Beja	138060	3,335	3	4	3,464	3
Braga	760474	18,369	18	19	18,493	18
Bragança	155894	3,766	3	4	3,464	4
Castelo Branco	193480	4,673	4	5	4,472	5
Coimbra	392836	9,489	9	10	9,487	10
Évora	147444	3,561	3	4	3,464	4
Faro	350777	8,473	8	9	8,485	8
Guarda	175130	4,230	4	5	4,472	4
Leiria	419988	10,145	10	11	10,488	10
Lisboa	1852123	44,737	44	45	44,497	45
Portalegre	108455	2,620	2	3	2,449	3
Porto	1546682	37,359	37	38	37,497	37
Santarém	403277	9,741	9	10	9,487	10
Setúbal	697331	16,844	16	17	16,492	17
Viana do Castelo	255034	6,160	6	7	6,481	6
Vila Real	235562	5,690	5	6	5,477	6
Viseu	380941	9,201	9	10	9,487	9
Açores	216245	5,223	5	6	5,477	5
Madeira	251465	6,074	6	7	6,481	6
Europa	72550	1,752	1	2	1,414	2
Fora da Europa	94441	2,281	2	3	2,449	2
Total	**9490680**	**229,243**	**219**	**241**	**229,471**	**230**

O método de Hamilton baseia-se na proporcionalidade directa entre o número de votantes em cada candidato e o número de lugares a concurso (obtém-se assim a quota de cada estado). Após a determinação das quotas de cada candidato, Hamilton determina que se atribuam a cada concorrente tantos representantes quantos a parte inteira da quota. No entanto, após esta primeira fase, uma vez que se produziu um arredondamento às unidades por defeito, faltarão atribuir alguns lugares: Hamilton sugere que tal atribuição seja feita por ordem decrescente das partes não inteiras das quotas. Assim, perante a aplicação do método de Hamilton aos valores populacionais dos vários círculos eleitorais vemos os resultados:

Círculos Eleitorais	Número de eleitores	Quota	Parte inteira quota	Lugares adicionais	Distribuição de Deputados
Aveiro	642491	15,570	15	1	16
Beja	138060	3,346	3		3
Braga	760474	18,430	18		18
Bragança	155894	3,778	3	1	4
Castelo Branco	193480	4,689	4	1	5
Coimbra	392836	9,520	9	1	10
Évora	147444	3,573	3	1	4
Faro	350777	8,501	8		8
Guarda	175130	4,244	4		4
Leiria	419988	10,178	10		10
Lisboa	1852123	44,885	44	1	45
Portalegre	108455	2,628	2	1	3
Porto	1546682	37,483	37		37
Santarém	403277	9,773	9	1	10
Setúbal	697331	16,899	16	1	17
Viana do Castelo	255034	6,181	6		6
Vila Real	235562	5,709	5	1	6
Viseu	380941	9,232	9		9
Açores	216245	5,241	5		5
Madeira	251465	6,094	6		6
Europa	72550	1,758	1	1	2
Fora da Europa	94441	2,289	2		2
Total	**9490680**	**230,000**	**219**	**11**	**230**

Os métodos de Webster, Hill e Hamilton produzem aqui os mesmos resultados. Esta situação não é necessariamente assim, no entanto, Webster e Hill tendem a estar próximos nas distribuições que produzem, uma vez que a regra utilizada para as aproximações por defeito ou por excesso não é muito diferente.

Estes métodos assumem aqui uma posição intermédia relativamente a Hondt e Adams. Por exemplo, nos círculos de Lisboa e Porto estes métodos prevêem a atribuição de menos 4 deputados comparativamente com Hondt, mas mais 3 que Adams. No que concerne aos círculos com menos representantes, Beja, Bragança, Évora e Portalegre, propõem mais 3 representantes que Hondt, ao passo que Adams propunha 4.

Perante esta realidade, os métodos de Webster, Hill e Hamilton revelam aqui posições menos extremadas que Adams e Hondt: não tendem a ignorar os círculos (ou partidos, quando estamos perante resultados eleitorais) com menor número de eleitores, como Hondt, nem enfatizam, de modo talvez excessivo, a importância de círculos com fraca densidade populacional, como Adams.

A realidade é que, se perante resultados eleitorais há algum consenso quanto à necessidade de estabilidade política que legitima a adopção do método de Hondt, impedindo oscilações excessivas que podem ser dramáticas do ponto de vista da governabilidade de um estado democrático, quando estamos perante a determinação do número de representantes a eleger por cada círculo eleitoral, talvez fizesse sentido uma posição menos extremada que a proposta por Hondt.

Um olhar mais atento permite-nos ver que, de acordo com o actualmente estabelecido, pelo círculo de Lisboa cada 39407 eleitores são representados por um deputado, enquanto que em Portalegre esse valor sobe para 54228. Se fosse usado o método de Webster estes valores alterar-se-iam para 41158 e 36152, respectivamente; talvez uma situação mais justa…

SOBRE O LIVRO DE RON AHARONI (TERCEIRO)

Carlos Pereira dos Santos
ISEC

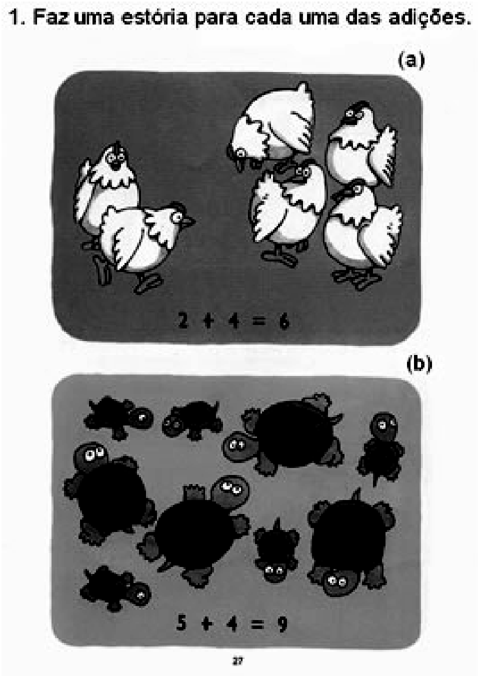
Ron Aharoni, professor de matemática no Instituto de Tecnologia em Israel, aceitou o convite de um amigo para ensinar matemática no ensino básico. Desde então, tem dedicado muito do seu tempo a esta fascinante aventura. Escreveu um livro que pode servir de referência a professores e a todos os que se interessam pelo ensino da matemática básica.

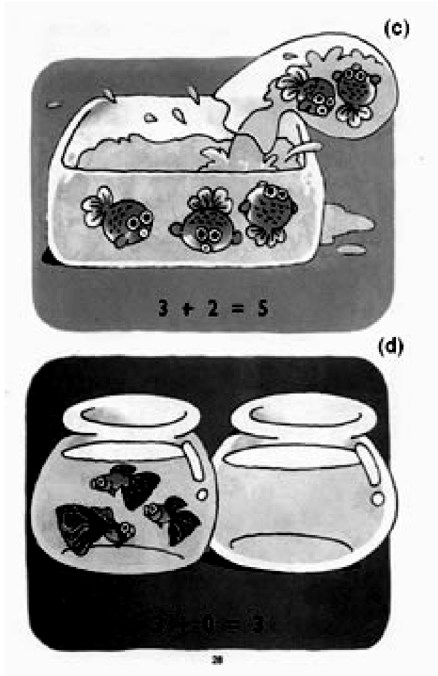
PARTE III: Olhando para o primeiro livro de matemática de Singapura

Neste texto iremos utilizar algumas imagens de páginas traduzidas do primeiro livro de matemática de Singapura. Trata-se de uma tradução não autorizada que tem por objectivo apenas a escrita deste artigo.

No livro de Aharoni é dado grande destaque ao sistema de Singapura e os seus livros são altamente elogiados. Este texto constitui uma continuação de um artigo publicado anteriormente neste jornal dedicado ao primeiro livro de matemática de Singapura.

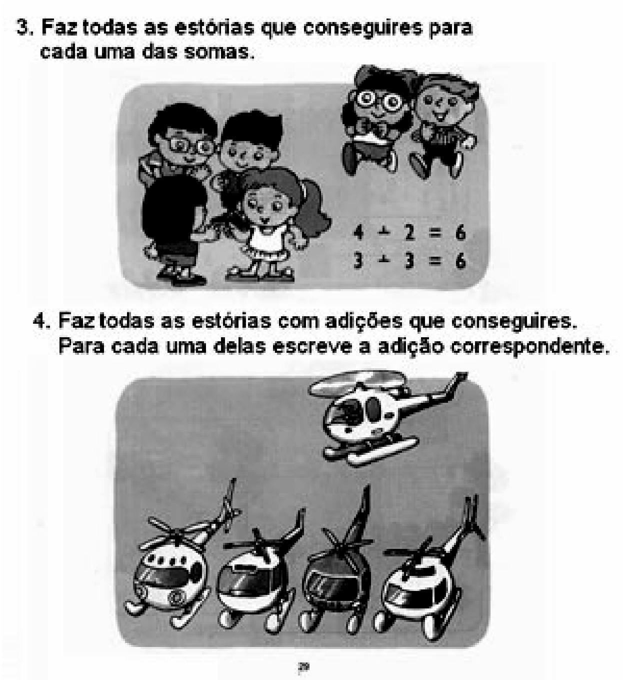
Já vimos no artigo anterior que a invenção de estórias numéricas por parte das crianças é um método recorrente no ensino da matemática inicial em Singapura. Repare-se em mais algumas páginas:



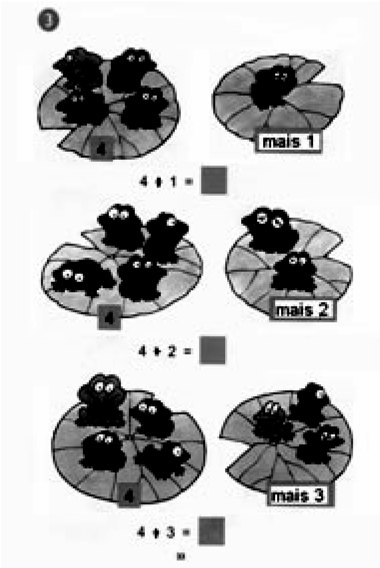


A utilização de um símbolo para o zero é parte basilar do nosso sistema de numeração. O primeiro capítulo tratava da contagem de zero a dez. No tratamento das estórias, o zero também não é deixado de lado. Em resumo, o zero aparece com concretizações concretas e é tratado igualmente com os outros números.

Há um enorme cuidado com o tratamento das estórias aritméticas nos livros de Singapura. Num primeiro estágio as estórias são contadas às crianças com a operação ao lado. Num segundo estágio, é apresentado um desenho com uma operação e a criança tem de inventar uma estória. Num terceiro estágio (exemplo de baixo da próxima página) é apresentado um desenho e a criança pode inventar mais do que uma estória para mais de uma operação. Num quarto estágio, possível na sala de aula, tudo é livre (incluindo a feitura do desenho). Tudo é feito sequencialmente com *timings* adequados.



Nos livros de Singapura, frases muito comuns como «incutir na criança o sentido do número» e «o sentido das operações» não são meros conjuntos de palavras. São assuntos muito sérios que significam pensar muito seriamente sobre o que está na base do «sentido do número» e do «sentido das operações». Uma das metas fundamentais e uma das mais ambiciosas consiste em provocar na criança um conhecimento intuitivo e automático sobre as partições do 10. Dessa forma, quando se passar para o sistema decimal, a criança, de forma mais fácil, poderá pensar nas operações tendo como ponte a «dezena mais próxima». Aliás, a utilização da «dezena mais próxima» como ponte, é o que todos nós fazemos — no fundo é o conhecimento automático das partições da dezena combinada com pontes mentais que faz com que não contemos pelos dedos em cálculos mais complicados. O primeiro livro de Singapura é totalmente elaborado tendo por meta incutir na criança «partições automatizadas» e processos mentais apropriados. De qualquer forma, há maneira de se pensar nos números ainda numa fase pré «partições automáticas». E neste livro, o recurso à simples contagem para auxiliar as adições, ao estilo da clássica contagem pelos dedos, também não é esquecida. Isso fará com que a criança tenha um conhecimento mais rico sobre os números e sobre as operações. As próximas páginas tratam da «adição por contagem continuada».

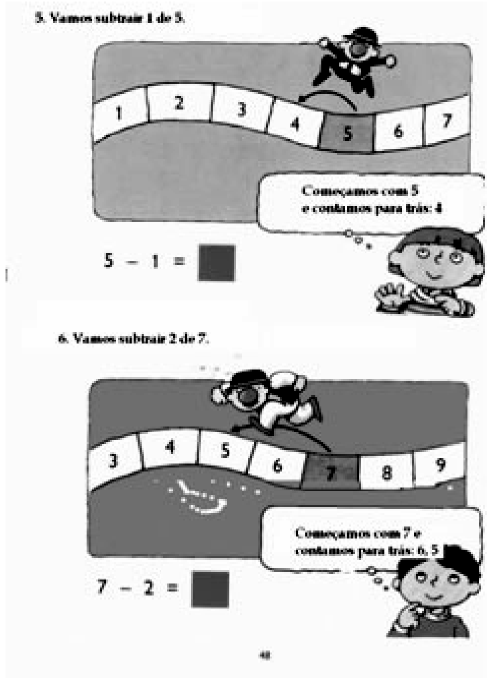


Repare-se no pormenor de, na página da direita, o eixo ser algo "desonesto". Não é linear nem contínuo. A razão para tal é simples. Para uma criança acabada de entrar para o 1º ciclo, a recta real contínua é de uma abstracção violenta. É uma abstracção não justificada. É o perigoso "saltar camadas"...

O capítulo quatro inaugura o assunto da subtracção. O livro segue a estrutura e o método utilizado quando se tratou a adição, como podemos ver nas páginas seguintes:

Repare-se como a página de formalização é metódica tal como se fez no caso da adição. Repare-se como continua presente a preocupação com o intercalar de estórias estáticas com estórias dinâmicas.

Quem leu o artigo que precedeu a este vai reconhecer nas próximas páginas as características estruturais deste livro. Como já foi dito anteriormente, quanto mais pequenas, mais as crianças precisam de método...



(CONTINUA)

Português ganha prémio da Académie International d'Histoire des Sciences com tese sobre matemática em Portugal

Jorge Nuno Silva

Bernardo Mota, do Centro de História das Ciências da Universidade de Lisboa, ganhou o Prémio «Jeune Historien» da Académie Internationale d'Histoire des Sciences do ano de 2009, pela sua tese de doutoramento «O estatuto das matemáticas em Portugal nos séculos XVI e XVII».

O prémio, a mais alta distinção internacional concedida a uma tese em história da ciência, foi entregue numa cerimónia pública em Budapeste, no passado mês de Julho. No relatório de um dos proponentes do prémio (Paolo Mancosu, U. C. Berkeley, EUA), pode ler-se: "Mota's achievement is outstanding. It is a major contribution to the history of the philosophy of mathematics; to the institutional history of mathematics and philosophy, especially (but not only) in Portugal; and to the institutional history of the Jesuits".

Bernardo Mota apresentou publicamente o seu doutoramento em Junho de 2008. Foram seus orientadores Henrique Leitão, do Centro de História das Ciências da UL, e Arnaldo Espírito Santo da Faculdade de Letras da UL. É a primeira vez que um português é homenageado com esta distinção.

Chegámos à fala com o premiado. Tínhamos alguma curiosidade sobre tão impressionante feito…

Jorge Nuno Silva (JNS): Parabéns! Diz-me: de que trata a tua tese?

Bernardo Mota (BM): A tese estuda a evolução de um antigo debate sobre o estatuto epistemológico das ciências matemáticas e a sua relação com os outros ramos do conhecimento humano. Esta discussão, que assentava numa análise contrastiva entre a teoria da ciência aristotélica e a geometria euclidiana, já vem da Antiguidade Clássica, acabando por ser introduzida nos currículos de filosofia das principais universidades europeias durante a Idade Média. Mais tarde, foi retomada no século XVI, com novo vigor e sob uma nova perspectiva renascentista. O debate ficou conhecido como a *Quaestio de certitudine mathematicarum* e enquadrou o processo de revisão da filosofia aristotélica e a construção da moderna cultura científica ocidental.

A tese pretende ilustrar como, ao contrário do que pensamos usualmente, a ciência moderna é o culminar de um processo iniciado na antiguidade clássica e que o conhecimento científico moderno não nasceu da oposição revolucionária a ou da negação das ideias dos autores antigos ou medievais. A ciência moderna é antes o natural desenvolvimento da especulação daqueles.

O meu trabalho procura reinterpretar a ideia que os especialistas tinham do debate histórico sobre o estatuto científico da matemática e determinar o contributo dos autores nacionais para o debate (realçando a significativa contribuição para a discussão a nível nacional e a nível internacional por parte dos Jesuítas portugueses).

JNS: Como surgiu o tema?

BM: O tema tinha de incluir estudo de tópicos usualmente integrados no corpo de saberes a que chamamos ciências puras e outros integrados na área das humanidades. Tinha de ser um tema "de ponta" meio trabalhado, ou seja, o trabalho tinha de estar relacionado um tópico unanimemente reconhecido como fundamental na história da ciência, mas para o qual não havia tratamento compreensivo e diacrónico. Tinha de ser um tema universal, mas em que a cultura portuguesa estivesse presente de forma tão peculiarmente interventiva que inflectisse de alguma forma a evolução da cultura europeia. Outra condição era o tema interessar a pessoas de muitas áreas diferentes (filosofia, história da ciência, estudos clássicos, matemática, história da educação, etc.).

JNS: Que dificuldades particulares apresentou?

BM: As principais dificuldades foram trabalhar com fontes tão diversas (textos em Grego e Latim), de épocas tão diversas (antiguidade clássica, época medieval, renascimento, séculos da chamada Revolução Científica); com textos manuscritos às vezes quase impossíveis de ler e de áreas tão diferentes (matemática: Euclides, p.e.; filosofia: Aristóteles, p.e.).

JNS: Como foi o trabalho com os teus orientadores?

BM: Óptimo. Fundamental o orientador estar tão envolvido na matéria a tratar quanto o orientando. Muito importante uma relação de trabalho muito próxima. Com o meu orientador de História da Ciência (Henrique Leitão) tive um período inicial com trabalho tutorial muito intenso (às vezes mais que uma reunião por semana) e muitos *emails* trocados diariamente (isso mesmo: diariamente). Foi ele quem me passou a maior parte da bibliografia fundamental ao longo destas reuniões, nem sequer a tive de procurar por mim. Muito relevante também integrar projecto(s) dirigidos pelo(s) orientador(es). Fica mais fácil trabalhar em diversas frentes ao mesmo tempo. O meu orientador da área de Estudos Clássicos foi sempre uma bóia de salvação para o Latim, o Grego e para a Cultura Clássica. Regra número um: é preciso perceber ritmos e modos de trabalho dos orientadores (é preciso que tanto quem orienta como quem é orientado puxe a carroça ao mesmo tempo); regra número 2: é preciso exigir sempre mais do orientador do que aquilo que nos é exigido por ele, o que nem sempre é fácil; regra número 3: aconselho vivamente a escolha de orientadores pluridisciplinares, com formação vasta e diversificada, entusiasmados e plenos de juventude intelectual.

JNS: Tu tens formação e profissão ligadas à Faculdade de Letras. Como é que uma pessoa como tu faz uma tese num assunto destes?

BM: Não aceitando a tradicional separação entre letras e ciências a que a escola nos habitua, forçando sempre uma formação forte nas vertentes de cultura e ciência, lutando por uma unidade dos saberes que convencionámos não existir.

Falámos também com Henrique Leitão, que não esconde o orgulho no trabalho do Bernardo.

JNS: As palavras de Mancosu impressionam: "Mota's achievement is outstanding. It is a major contribution to the history of the philosophy of mathematics... One is struck in such a young scholar by the depth of the analysis as well as by the vision of synthesis displayed in the dissertation...". Sei que trabalharam com grande entendimento. O que gostavas de salientar no trabalho do Bernardo?

Henrique Leitão (HL): Acerca deste trabalho e do importante prémio internacional que recebeu, em primeiro lugar, como é evidente, gostava de dar os parabéns ao autor e desejar-lhe boa sorte para o futuro. Espero que esta tenha sido apenas a primeira de muitas boas notícias que ainda vamos receber do Bernardo Mota.

Mas importa observar o seguinte: trata-se de uma tese escrita em português e sobre um tema essencialmente português. Porém, nada disso foi obstáculo a que recebesse a mais alta distinção internacional para uma tese em história da ciência. Ou seja: a qualidade do conteúdo é tudo e não há razão para pensar que um trabalho só porque versa algum aspecto da história científica portuguesa tenha menos interesse internacional.

JNS: Sobre a relevância do tema versado, o que nos podes dizer?

HL: O tema desta dissertação prende-se com discussões culturais e científicas ocorridas em Portugal durante o século XVII --- talvez o século mais mal conhecido da nossa história intelectual. Como se sabe, uma certa historiografia eliminou de cena, *a priori*, alguns dos acontecimentos mais interessantes da nossa história científica. É evidente para todos os historiadores de ciência que uma das tarefas mais importantes hoje em dia consiste em ultrapassar esses espartilhos, que tantas vezes paralisaram historiadores de outras gerações, olhando para a nossa história científica e cultural sem baias nem preconceitos. Há ainda muito à espera de ser estudado (e premiado!, esperamos todos nós) por quem tenha o talento, a determinação e a liberdade de espírito para o fazer.

JNS: O Bernardo Mota evidenciou grande virtuosismo e versatilidade intelectual ao abordar assunto tão complexo…

HL: Esta dissertação relembra uma verdade incontornável: a história da ciência é uma disciplina difícil que exige uma preparação especial e muito exigente para ser praticada. No caso deste trabalho, sem conhecimentos avançados de latim, de grego, de matemática, de história intelectual, de filosofia, etc., nem sequer se poderia ter começado a investigação. Os investigadores (como o Bernardo Mota) que reúnem estas capacidades e talentos são sempre raros e por isso nada é mais importante do que detectá-los, treiná-los e estimulá-los. JNS: Este prémio reflecte a existência de historiadores da ciência de qualidade em Portugal, ou trata-se simplesmente de um caso isolado?

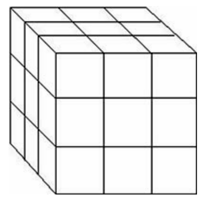
HL: Bernardo Mota foi o primeiro português a receber o famoso «Prix Jeune Historien» da Académie Internationale d'Histoire des Sciences. Fica absolutamente claro que em Portugal há pessoas e grupos de investigação a trabalhar em história da ciência ao mais alto nível internacional.

PROBLEMA DO MÊS (XVI)

JOGO NUM TABULEIRO 3x3

Pedro Palhares
Universidade do Minho

No problema XIV dizia-se que estamos a trabalhar com uma serra eléctrica e que queremos cortar um cubo de madeira em 27 cubos iguais. Podemos fazer isso fazendo seis cortes no cubo, mantendo as peças juntas em cada corte.



No último número dava-se como pista que se concentrassem no cubo que não se vê e tentassem ver como podíamos ficar a vê-lo.

Era uma pista críptica mas com lógica se podia retirar o que se pretendia dizer. O cubo que não se vê (pensando em mexer o cubo grande de modo a ver de todas as perspectivas) é o cubo interior, que não tem nenhuma face visível.

Como podemos ficar a vê-lo? Teremos que cortar todas as suas faces que são seis. Será que podemos cortar duas dessas faces num mesmo corte? Na verdade não podemos pois as faces do cubo estão todas em planos diferentes. Então serão precisos pelo menos seis cortes.

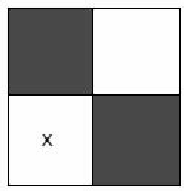
Serão necessários mais de seis cortes? É fácil de ver que seis cortes bastam. Mesmo não rearranjando após um corte, na figura de cima se vê que dois cortes em cada dimensão segundo as linhas assinaladas produzem todos os 27 cubos. Como notava o leitor Pedrosa Santos, o total de faces dos 27 cubos é de 162, das quais 54 já estão visíveis. Falta tornar visíveis 108 faces. Ora os cortes que referi acima tornam visíveis 18 faces de cada vez, perfazendo as 108 faces que importa tornar visíveis.

******

O problema do número anterior dizia:

Se considerarmos o tabuleiro de baixo e começarmos no quadrado marcado com **x**, é fácil encontrar um caminho em movimentos horizontais ou verticais que passe por todos os quadrados uma e uma só vez. É até fácil de ver que há apenas dois caminhos.

O que é que acontece quando aumentar o tabuleiro (nxn) mantendo o começo do caminho no quadrado imediatamente abaixo do superior esquerdo?

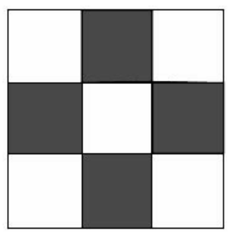


Para quem ainda não conseguiu obter uma resposta, recomendo que ao analisar considerem separadamente os tabuleiros de ordem par e os de ordem ímpar.

******

Para este número seleccionei o seguinte problema:

Dois jogadores alternam a colocar peças num tabuleiro 3x3 (uma apenas por cada quadrado). Cada jogador, na sua vez, pode colocar quantas peças quiser numa mesma linha vertical ou horizontal. O vencedor é o jogador que colocar a última (nona) peça.



É melhor jogar em primeiro ou em segundo? E se o tabuleiro fosse 4x4?

Quem quiser comentar ou apresentar solução pode fazê-lo enviando e-mail para *palhares@iec.uminho.pt*, colocando problema do mês como título.

GEOMETRIA DA RÉGUA

Parte I

Liliana Monteiro

As construções desta geometria do plano utilizam apenas a régua não graduada. Inicialmente são considerados os pontos do plano $(1,0)$, $(0,1)$, $(2,0)$ e $(0,2)$.

Definem-se:

- ***ponto*** como um dos iniciais ou como a intersecção de duas *rectas*;
- ***recta*** como a recta que passa por dois *pontos*;
- ***circunferência*** como uma circunferência com centro num *ponto* conhecido e que passa por um outro *ponto* previamente conhecido;
- ***número*** como o valor de x sendo $(x,0)$ um *ponto*.

Saliente-se que uma *circunferência* se considera construída dados o centro e um *ponto* da mesma. Não é obrigatório que todos os pontos da *circunferência* sejam construtíveis.

Vamos, neste artigo, estudar algumas potencialidades desta Geometria. Para tal, vamos, provar alguns resultados relativos aos *pontos* desta geometria.

Resultado 1: Os pontos $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ e $(0,1)$ são *pontos de régua* e são vértices de um quadrado. Os pontos médios dos lados dos quadrados são *pontos de régua*. Todas as *rectas de régua* contêm três *pontos de régua* tais que um deles é o ponto médio dos outros dois.

Demonstração: As seis *rectas* determinadas pelos *pontos* iniciais $(1,0)$, $(0,1)$, $(2,0)$ e $(0,2)$. têm equações $x=0$, $y=0$, $x+y=1$, $x+y=2$, $2x+y=2$, $x+2y=2$.

Assim, por intersecção destas *rectas de régua*, $(0,0)$ e $\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ são *pontos de régua* e, consequentemente, $y=x$ é uma *recta de régua*.

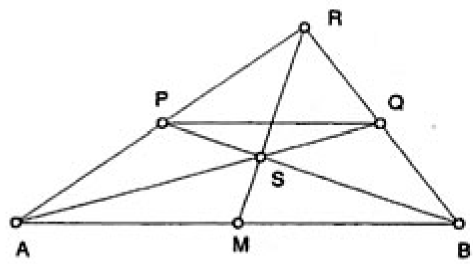
Por intersecção vem que $(1,1)$ e $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ são *pontos de régua* e, consequentemente, $x=1$ e $y=1$ são *rectas de régua*.

Por intersecção vem que $\left(\frac{1}{2},0\right)$ e $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ são *pontos de régua*.

Resta provar a última frase do resultado. Uma *recta de régua* intersecta necessariamente as paralelas $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$ e $x = 1$ ou as paralelas $y = 0$, $y = \frac{1}{2}$ e $y = 1$. Em qualquer dos casos, os três pontos de intersecção determinam a bissecção de um segmento.

Resultado 2: Sejam A e B dois pontos de régua. Se existir uma *recta de régua* paralela a AB, o ponto médio de $[AB]$ é um *ponto de régua*. Reciprocamente, se A, M, B e P forem *pontos de régua* distintos com M ponto médio de $\left[AB\right]$, então a recta paralela a AB que passa por P é uma *recta de régua*.

Demonstração: A imagem ao lado representa uma construção para ambas as afirmações do enunciado do resultado.



Comecemos por provar a primeira afirmação. Dada uma *recta de régua* paralela a AB, existem, pelo resultado anterior, *pontos de régua* P e Q nessa recta tais que $\left[APQB\right]$ é um trapézio. Determinam-se então os *pontos de régua* R, S e M (por esta ordem), em que M é o ponto médio de $\left[AB\right]$.

Por outro lado, dados os *pontos de régua* A, M, B e P, com M ponto médio de $\left[AB\right]$ e P não pertencente a AB, o resultado anterior garante a existência de um *ponto de régua* R em AP tal que $P \neq A$ e MR e BP não são paralelas. Podemos então construir os *pontos de régua* S e Q, sendo PQ a paralela pretendida no enunciado.

Resultado 3: O ponto médio de dois *pontos de régua* é um *ponto de régua*. Uma recta paralela a uma *recta de régua* que passa num *ponto de régua* é uma *recta de régua*.

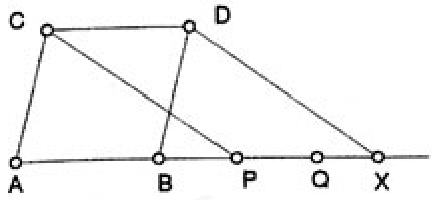
Demonstração: Vamos começar por provar a segunda parte do resultado. Uma vez que, pelo resultado 1, cada *recta de régua* passa por três *pontos de régua*, em que um deles é o ponto médio dos outros dois, e, pelo resultado 2, e uma recta paralela a uma *recta de régua* que passa num *ponto de régua* é também uma *recta de régua*, temos o resultado pretendido.

A primeira parte deste resultado é então imediata a partir do resultado 2.

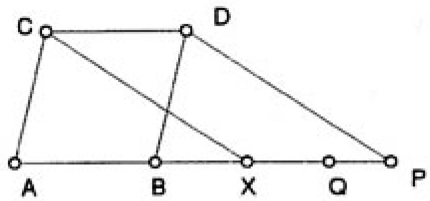
Resultado 4: Sejam P e Q *pontos de régua* distintos. Se A e B forem dois *pontos de régua* em PQ, o ponto X em $\dot{P}Q$, tal que $\overline{PX} = \overline{AB}$, é um *ponto de régua*.

Demonstração: Seja C um *ponto de régua* que não pertence a PQ (existe no conjunto de pontos inicial) e designemos por D o *ponto de régua* que é intersecção da *recta* paralela a PQ que passa por C e da *recta* paralela a AC que passa por B. Temos que $[ACDB]$ é um paralelogramo.

Suponhamos que D e Q estão no mesmo semiplano definido por CP. Designemos por X a intersecção de PQ com a *recta de régua* paralela a CP que passa por D. Neste caso, $[PCDX]$ é um paralelogramo.



Suponhamos agora que D e Q estão em semiplanos diferentes definidos por CP. Designemos por X a intersecção de PQ com a *recta de régua* paralela a DP que passa por C. Neste caso, $[XCDP]$ é um paralelogramo.



Em qualquer um dos dois casos anteriores, X é um *ponto de régua* que pertence a PQ e $\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{PX}$, tal como pretendíamos.

Índice