Ano 25º Lisboa, Mai/Jun 2009 Nº 276/7

Jornal de Mathemática Elementar

Endereço de Email PUBLICAÇÃO MENSAL
jme@spm.pt

Director Honorário: Sérgio Macias Marques

Director: Jorge Nuno Silva **Preço:** ***1,80€*** **(IVA incluído)**

Caros leitores,

Nesta altura de fim de ano escolar, cumpre-nos deixá-los com uma leitura tão agradável quanto possível, desejando óptimas férias para todos e solicitando ajuda na angariação de assinantes e colaboradores.
Em Setembro estaremos de volta!

Jorge Nuno Silva

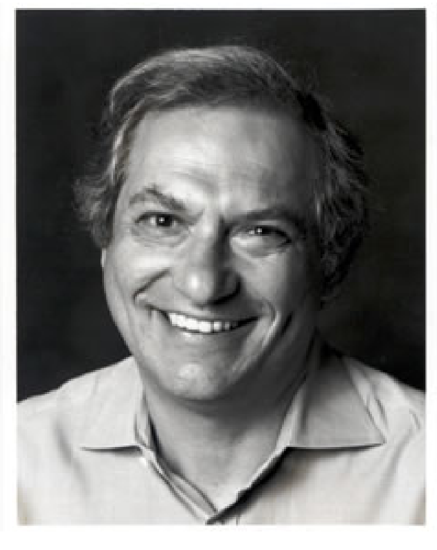
FICHA TÉCNICA

Registo nº 110029-ISSN 1646-978X
Nº Contribuinte 501065792
Impressão Repro 2000
Tiragem 1000 exemplares
Redacção e Administração
SPM. Av. da República, 45-3º
1050-187 Lisboa
Tel. 217 939 785

Galeria de Matemáticos

Jorge Nuno Silva

Persi Diaconis



Persi Warren Diaconis nasceu em 1945 em Nova Iorque. Hoje é Professor de Estatística da Universidade de Stanford, também nos EUA. O caminho académico que o levou da Escola Secundária George Washington, na sua cidade natal, até à famosa universidade californiana é tudo menos linear.

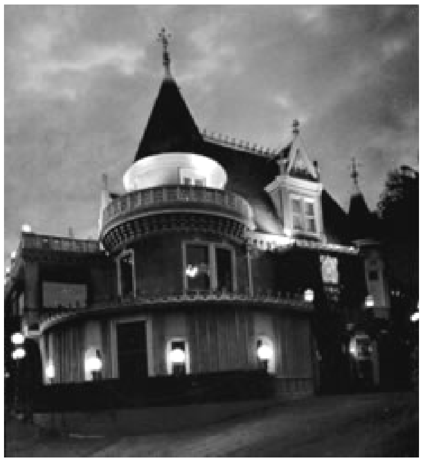
Nascido numa família de músicos, era esse o destino que lhe tinham reservado, tendo frequentado a prestigiada escola Julliard desde os cinco anos de idade.

Julliard, hoje

Contudo, aos catorze Persi fugiu de casa, juntando-se ao famoso Dai Vernon como mágico saltimbanco. Assim, o ensino secundário foi abandonado e a sua actividade intelectual concentrou-se na criação de truques de cartas.

Este seu interesse tinha-o levado a conhecer Martin Gardner, com quem trocava ideias sobre inovações nesta área.

A associação com Dai Vernon durou dois anos, findos os quais Vernon se fixou na Califórnia, onde fundou o Magic Castle, instituição de grande prestígio entre os praticantes.



Magic Castle, Hollywood, Califórnia, EUA

Persi Diaconis continuou a sua vida de mágico ambulante por mais oito anos. Ao todo, foi mágico profissional durante dez anos.

Cartão profissional de Persi Diaconis

A sua curiosidade tinha-o levado a tentar ler um livro que, julgava, o ajudaria muito a compreender a ciência das probabilidades, útil na invenção de novos e melhores truques. Tratava-se da obra em dois volumes de Feller "*An Introduction to Probability Theory and Its Applications*". Mas faltavam-lhe as noções matemáticas necessárias à compreensão desse texto. Foi isso que o motivou para voltar aos estudos.

Com surpresa soube que a sua escola lhe tinha concedido o diploma do ensino secundário, mesmo não tendo estado presente! Como o informaram mais tarde "os professores não viram vantagem em reprová-lo".

Com o diploma na mão, inscreveu-se na City College de Nova Iorque, como aluno nocturno. Aqui teve um óptimo professor de Probabilidade e Estatística, Leonard Cohen, o que reforçou o seu interesse nesta área.

City College, Nova Iorque

Após terminar os estudos na City College, em 1971, Persi concorreu a Harvard como aluno de doutoramento. Mas Harvard não costumava admitir estudantes da City College… O que tornou possível a entrada no departamento de Estatística foi a carta de recomendação que Martin Gardner enviou a Fred Mosteller, que basicamente dizia que Diaconis era um óptimo inventor de truques de cartas. Mosteller, também ele apreciador e criador de alguns truques, aceitou o candidato. Em breve estavam a escrever um artigo em conjunto, sobre o comportamento assimptótico do número de divisores primos de um inteiro.

A sua tese de doutoramento trata de tema com aplicações práticas, como é do seu agrado.

A Lei de Benford diz que, em algumas amostras aleatórias (nomeadamente da "vida real") de números inteiros, o primeiro dígito não apresenta uma distribuição uniforme entre 1, 2, …, 9. A distribuição segue a seguinte lei de probabilidade

$$P\left(1^{o}\ d\acute{\imath}gito = i\right) = Log\left(1+\frac{1}{i}\right)$$

Pelo que 1 é o primeiro dígito mais frequente, ocorrendo quase um terço das vezes. Este resultado foi comprovado empiricamente em amostras de comprimentos de rios, números de porta de endereços postais, constantes matemáticas e físicas, etc.

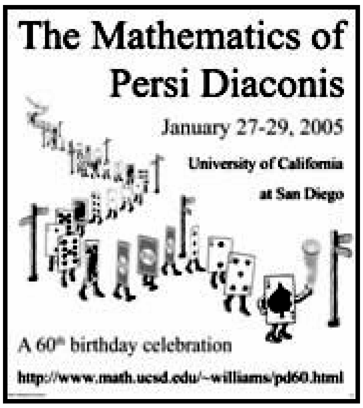
Diaconis provou que o mesmo sucede com sucessões como n^b, a^n, $n!$ e várias outras.

Um resultado de que Persi Diaconis se orgulha é o da determinação do número óptimo de vezes que se deve baralhar para garantir que se distribuíram as cartas aleatoriamente (sete).

Todos já lançámos uma moeda ao ar para tomar uma decisão à sorte, com probabilidades iguais para dois acontecimentos (cara ou coroa, ou, como se diz agora, face nacional ou europeia).

Contudo, Persi Diacinis provou, ao fim de muito trabalho, que incluiu construir uma máquina de lançar moedas e filmar a altíssima velocidade, que a probabilidade de se obter a face inicial não é de 50% mas sim de 51%. Há uma batota comum em alguns casinos que consiste em retirar um centésimo de polegada a algumas arestas dos dados, tornando-os assim viciados.
Quantificar estatisticamente este expediente está a ocupar Diaconis.

Hoje Diaconis é um estatístico de sucesso, tendo até recebido um prémio MacArthur. Este prémio, também conhecido por “bolsa dos génios”, consistiu em 200.000 dólares livres de impostos e de qualquer obrigação.



Cartaz do encontro de homenagem a Diaconis pelos seus 60 anos

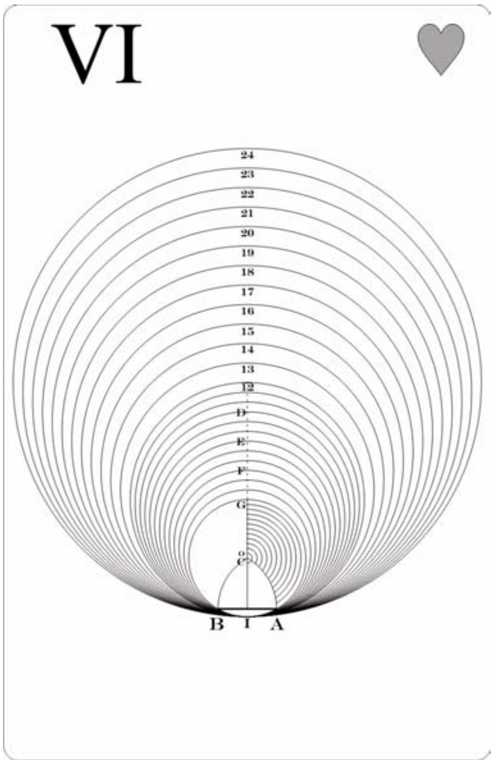
O seu gosto pela matemática e pela magia estão na base do seu plano, que partilha com o matemático Ron Graham, de escrever um livro que ensine matemática utilizando truques de cartas! Cá o esperamos com ansiedade!

O BARALHO PEDAGÓGICO DE DESCARTES

Marisa Ferreira

Na Sena de Copas, Descartes dá continuidade à carta anterior, descrevendo a construção de polígonos, desde o dodecágono ao tetracoságono:

Proposição VII: Sobre uma linha recta dada traçar o polígono que se queira, de 12 a 24 lados.



BORDA E CONDORCET

Um apontamento histórico

Carla Cardoso
EBI Quinta do Conde

Nos artigos anteriormente publicados sobre a temática das eleições, muito se falou sobre a contagem de Borda e também as comparações a pares de Condorcet. Acredito que vale a pena conhecer mais alguns factos históricos a seu respeito, pois contribuem para a compreensão das abordagens que tomam nos seus trabalhos.

Marie Jean Antoine Nicolas de Caritat Condorcet, conhecido como Marquês de Condorcet, nasceu em Ribemont, França, a 17 de Setembro de 1743. Condorcet era um matemático e mantinha contacto com algumas personalidades norte-americanas. Conhecia Thomas Paine, Benjamin Franklin e Thomas Jefferson. Em 1785, Condorcet foi nomeado cidadão honorário de Nova Iorque, tendo publicado, depois disso, alguns artigos anónimos como “un citoyen des Etatas-Units” ou “un bourgeois de New-Haven”.

Para Condorcet, a América era apenas uma experiência imaginada, uma vez que apenas viajara para fora de Paris quando visitou Voltaire perto de Genebra. Condorcet era um defensor dos direitos dos indivíduos, acreditava que a pessoa comum devia ter os mesmos direitos que a realeza, que as mulheres deviam ter os mesmos direitos que os homens, que os negros deviam ter os mesmos direitos que os brancos, e que a escravatura e a pena de morte deveriam ser abolidas. Condorcet defendia também uma postura intolerante relativamente à Igreja Católica: dizia que sonhava com o dia em que padres e escravos apenas existissem nos palcos dos teatros, enquanto personagens de um passado obscuro.

Três anos após o seu casamento, quando tinha quarenta e seis anos, deu-se a Revolução Francesa; Condorcet apoiava a causa republicana. Tornou-se Secretário da Assembleia, redigindo uma parte da Constituição Francesa. Defendia, no entanto, que fossem poupadas as vidas de Louis XVI e Marie Antoinette. Porém, Maximilien Robespierre sobe ao poder enviando o casal de monarcas para a guilhotina. Nessa mesma altura, foi posto de parte o documento que Condorcet havia elaborado para a Constituição – quando Condorcet demonstrou o seu repúdio foi considerado um inimigo da Revolução; passou, então, à clandestinidade.

Condorcet acabaria por falecer sob circunstâncias misteriosas, numa prisão de província em Bourg-la-Reine, a 29 de Março de 1794; alguns dizem que terá sido envenenado.

Condorcet e Jean Charles de Borda (1733 – 1799) eram rivais. Num documento de 1775, Condorcet descreve Borda como:

“Aquilo a que chamam «un bon académicien», pois ele fala na Academia e o que mais gosta de fazer é gastar o seu tempo a desenhar prospectos ou examinar máquinas; e, sobretudo, porque, apercebendo-se que foi ultrapassado por outros matemáticos, abandonou a matemática para realizar pequenas experiências… Alguns dos seus artigos mostram talento, apesar de não terem qualquer consequência relevante, e ninguém falar sobre eles.”

Talvez Condorcet invejasse Borda, pois este havia conhecido a sua terra prometida, a América. Borda, um pequeno herói da Revolução Americana, comandou os navios franceses *La Seine e La Solitaire* nas Caraíbas e na Costa Americana. Os britânicos capturaram Borda em 1782; após a sua libertação, pouco tempo depois da captura, regressou a França.

Em França encetou uma carreira de matemático e sobrevivente. Uma parte da sua fama reside no papel que desempenhou na construção do sistema métrico. Borda pertencia ao Comité des poids et mesures, ao lado de grandes cientistas como Condorcet, Antoine Lavoisier ou Pierre Simon Laplace.

O ilustre grupo pensava definir a unidade fundamental, o metro, como o comprimento de um pêndulo que completaria precisamente um movimento pendular por segundo. Mas Borda rejeitava essa ideia, não lhe agradava a ideia de fazer depender o metro do segundo, pois esta unidade de tempo não era decimal mas sexagesimal ("Babilónica", como dizia Borda em tom pejorativo). Borda insistia em que o metro fosse definido como a décima milionésima parte da distância do Pólo-norte ao Equador (ou seja, do quarto de meridiano terrestre). Mas na altura ninguém havia estado no Pólo-norte, não era conhecida uma medida tão específica do globo terrestre.

Optou-se por medir o meridiano de Dunkirk a Barcelona e, após tal jornada, construiu-se uma barra de platina com a medida exacta de um metro, que ficou arquivada em Paris. Assim, todos os que quisessem saber quanto media exactamente um metro, deviam fazer uma peregrinação à capital francesa. Sobretudo por esta razão, os Estados Unidos da América não adoptaram o sistema métrico. A recente nação apenas se limitou a importar o sistema decimal da moeda, dividindo a unidade, dólar, em cem cêntimos.

Borda pretendia fazer com os métodos eleitorais o que havia feito com o sistema métrico: torná-los científicos. Chegou, então, a uma conclusão surpreendente: a democracia nem sempre é justa. A 16 de Junho de 1779, Borda revelou este facto ao mundo num discurso na Royal Academy of Sciences. Tal registo escrito perdeu-se; no entanto, catorze anos depois, Borda voltou a falar sobre o assunto, tendo sido publicado um artigo no jornal da Academia, editado por Condorcet. Nesse artigo, Borda defendia claramente que numa eleição com dois candidatos, sendo os votantes chamados a assinalar a sua preferência, ganhará o candidato que realmente for preferido pelos votantes. No entanto, se a eleição se disputar entre três ou mais candidatos, não é linear que vença aquele que reúna maior apoio dos votantes.

Borda explicava aquilo a que actualmente se chama dispersão de votos ("vote splitting") – dois candidatos disputando posições muito próximas podem dividir entre si os votos, permitindo que um terceiro candidato, menos popular, vença.

Identificado o problema, Borda avançou para a tentativa de resolução, apresentando, assim, o método que actualmente se denomina contagem de Borda. No entanto, havia algo de problemático com este método que Borda não constatou;

também a Académie Française des Sciences não encontrou qualquer inconveniente, e adoptou a contagem de Borda em 1784.

No ano seguinte, o Marquês de Condorcet publicou a sua própria teoria sobre eleições como parte do tratado *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*. Esta obra tornou-se conhecida por ser uma das mais confusas, pretensiosas e difíceis de ler, jamais escritas na língua francesa. Condorcet constata que, de facto, não existe qualquer problema numa eleição disputada apenas entre dois candidatos; no seguimento desta ideia, propõe que se efectuem comparações a pares entre todos os candidatos – surgem assim as comparações de Condorcet, e as noções de vencedor de Condorcet, perdedor de Condorcet e também os ciclos... É também nesta altura que Condorcet tenta descredibilizar a contagem de Borda.

No entanto, foi outra a razão de eliminação da contagem de Borda. O marquês de Laplace, famoso pelo desenvolvimento do cálculo, das probabilidades e da astronomia, fez notar que a contagem de Borda era facilmente manipulável.

Imagine-se uma disputa renhida entre D e R. Mediante a contagem de Borda, devem ordenar-se todos os candidatos em concurso, inclusivamente aqueles que não têm reais possibilidades de vencer. Nesta eleição, existe um desses candidatos: X. Suponha-se que a preferência de um votante é: DRX. Existe uma forma de ajudar D: mover R para último lugar; em vez do "boletim verdadeiro" pode votar-se, estrategicamente, DXR. Ao mover R para último lugar, este é penalizado na contagem de Borda, pois perde um ponto. Não parece haver qualquer inconveniente: embora o votante prefira R a X, como X não tem possibilidades reais de ganhar, aquele que sai verdadeiramente beneficiado é D, que aumenta a sua distância em relação a R.

Laplace fez notar que esta situação é uma falha séria. No limite, imagine-se que todos os apoiantes de D fazem o mesmo: colocam X acima de R, e que todos os simpatizantes de R colocam X acima de D; neste cenário, o pequeno grupo que realmente apoia X, colocando-o em primeiro lugar, pode ver o seu candidato vencer as eleições. Esta situação só não tem um final terrível porque alguns votantes manterão as suas reais preferências nos boletins de voto, o que impossibilitará X de ganhar. Mas, então, quem ganhará? Provavelmente o candidato forte (D ou R) cujos apoiantes sejam mais estratégicos (ou menos honestos...).

Confrontado com esta falha apontada por Laplace, Borda respondeu que o seu método foi desenvolvido a pensar em pessoas honestas. Este comentário valeu-lhe o rótulo de sonhador. Mas, em sua defesa, o método que havia desenvolvido fora pensado para a Académie Française des Sciences, um grupo de ilustres cavalheiros que não votava secretamente.

Hoje sabe-se que nenhum método impede o voto estratégico, pelo que este facto não é um defeito a apontar especificamente à contagem de Borda (é isto que nos dizem os estudos de Allan Gibbard e Mark Satterthwaite).

Nem Borda, nem Condorcet, foram os primeiros a descrever os métodos que actualmente se associam aos seus nomes. A contagem de Borda foi usada pelo Senado Romano no século II d. C.; um milénio depois, tanto a contagem de Borda como o método de Condorcet aparecem registados pela mão de Ramon Llull (1235-1315), um lógico, místico e alquimista espanhol. A sua obra *Ars electionis* (1299) defende a adopção das comparações de Condorcet pela Igreja Católica.

Llull influenciou um pensador medieval, Nicholas de Cusa (1401-1464). Na sua obra, *De concordantia catholica,* Nicholas propõe a contagem de Borda como forma de eleger o Sagrado Imperador Romano. Teóricos ocidentais descobriram que a contagem de Borda foi usada na nação de Kiribati, no Pacífico Sul, aparentemente desenvolvida de forma independente.

Em Março de 1800, a Académie Française des Sciences recebeu um novo membro – Napoleão Bonaparte, o primeiro Cônsul de França. Um dos seus primeiros actos foi pedir a abolição da contagem de Borda. Napoleão pôde aperceber-se que a possibilidade de manipulação mediante o voto estratégico trazia problemas inaceitáveis. A Academia abandonou a contagem de Borda substituindo-a pelo voto plural com recurso a maioria absoluta, ou seja, só era admitido um novo membro se a decisão eleitoral tivesse mais de metade dos votos favoráveis, caso contrário, não se tomava qualquer decisão.

Foi deste modo que a contagem de Borda empreendeu o estado de coma eleitoral em que se encontra. Um destino igualmente obscuro teve o método de Condorcet, fruto de um livro que poucos conseguem ler.

SOBRE O LIVRO DE RON AHARONI

(SEGUNDO)

Carlos Pereira dos Santos
ISEC

Ron Aharoni, professor de matemática no Instituto de Tecnologia em Israel, aceitou o convite de um amigo para ensinar matemática no ensino básico. Desde então, tem dedicado muito do seu tempo a esta fascinante aventura. Escreveu um livro que pode servir de referência a professores e a todos os que se interessam pelo ensino da matemática básica.

É de louvar que se encontre à venda um livro escrito em português com este tipo de conteúdo. Fora casos pontuais como o projecto *Ciência a Brincar* orientado pela professora Carlota Simões da Universidade de Coimbra ou o livro *Elementos de Matemática* para professores de matemática, coordenado pelo professor Pedro Palhares da Universidade do Minho, é uma autentica raridade encontrar literatura em português nesta área.

Estamos a falar de *Matemática Ultra-Elementar* no sentido em que trata, por exemplo, de operações fundamentais, conceito de número e sistema de numeração e sua compreensão por parte de crianças a partir dos 5 anos. Aharoni diz

«A matemática elementar não é complexa, mas é profunda»

Nada pode ser mais verdade. Coisas ultra-básicas podem ser muito sofisticadas. A humanidade é persistente e engenhosa. Se o sistema de numeração que usamos, os seus algoritmos, etc., não fossem sofisticados não teriam sido necessários milénios de maturação. No entanto foram!

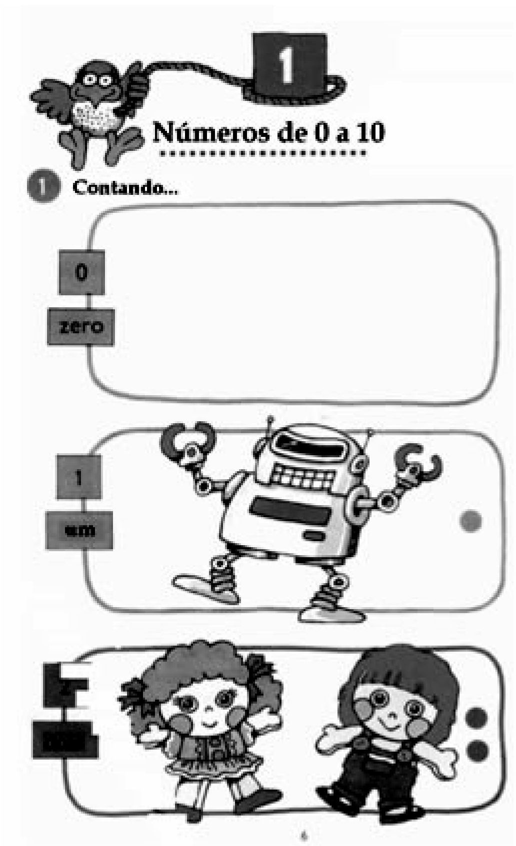
Normalmente, mesmo matemáticos profissionais competentes, subestimam a sofisticação envolvida nos processos simples. É por isso que fazem falta livros e trabalho nesta área. Existem conceitos que compreendidos desde cedo garantem grandes vitórias no futuro.

PARTE II: Olhando para o primeiro livro de matemática de Singapura.

Neste texto iremos utilizar algumas imagens de páginas traduzidas do primeiro livro de matemática de Singapura. Trata-se de uma tradução não autorizada que tem por objectivo apenas a escrita deste artigo.

No livro de Aharoni é dado grande destaque ao sistema de Singapura e os seus livros são altamente elogiados. Vamos ver a razão para tal.

Uma das características do ensino em Singapura é o seu **carácter metódico**. É fixado um alvo que, sem desvios, tenta ser atingido. Não é frequente ver um esquema, um desenho ou um exercício apresentando mais de um assunto de cada vez. Há a perfeita noção de que tudo se trata de uma **sequência de "camadas"**. Saltar uma pode ser terrível, com elevado preço a pagar.

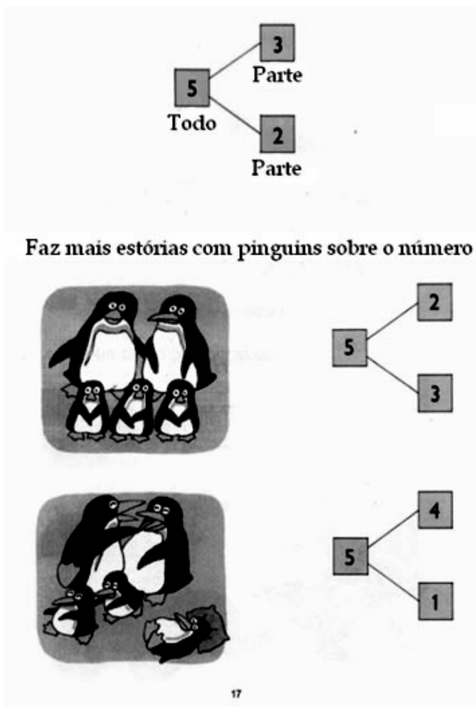


As primeiras páginas do primeiro capítulo do livro são dedicadas ao acto de contar. Todas as contagens parecem "desaguar" milagrosamente no número 10. A criança "sente" que algo se passa com o 10. Não há medo da repetição. As contagens aparecem nas primeiras páginas de trás para a frente, de frente de para trás, salteado. É claro que nada se pode construir sem este primeiro passo...

O segundo capítulo, Partindo os Números, fala das variadas partições dos números. A colocação deste capítulo em segundo lugar, imediatamente depois da contagem, mostra grande profundidade da matemática mais básica: Este é realmente o segundo assunto que deve ser tratado. Ensina às crianças que os números podem ser organizados como desejarmos, o que, entre outras coisas, é a base do sistema decimal (que não é mais do que uma organização numérica). Repare-se que a automatização sobre as várias formas como os números pequenos podem ser partidos é exactamente o que faz com que uma pessoa ganhe destreza com a aritmética.

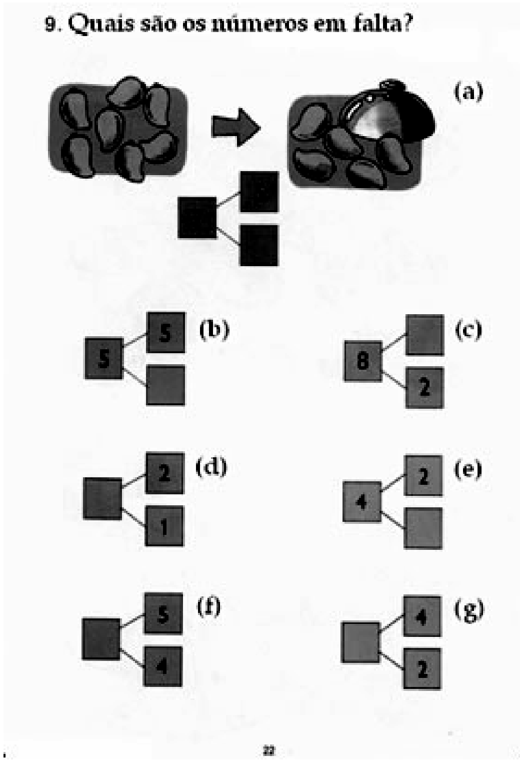
Um adulto típico não conta pelos dedos numa situação de 4+2. O adulto simplesmente sabe: conhece as partições do 6. Sendo assim, este simplesmente saber deve ser uma meta. Os livros de Singapura têm as metas bem definidas, e as boas metas!

A **ordem** com que os conceitos aparecem nos livros de Singapura é de crucial importância. Observe-se que a criança é convidada a inventar estórias numéricas logo na segunda ou terceira semana de estudos. Este facto mostra bem a importância que é dada ao **significado concreto das operações**. Nesta primeira fase, todas as estórias são acompanhadas da operação (nem sempre será assim). O foco está nas diferentes organizações que se pode ter do mesmo número. Repare-se também que há desenhos que indicam mais taxativamente um caminho para a estória do que outros.



Como de costume, os mais simples são sucedidos dos mais complicados. É uma óptima ideia os exercícios para crianças de 6 anos serem baseados em estórias. Não se trata de facilitar, nem de fazer com que a criança descubra por si os conceitos, nem de chavões retóricos sem significado. Todos os capítulos são muito bem pensados, adaptados à idade das crianças e com objectivos concretos e bem definidos.

Não esqueçamos a forma como as "camadas" vão aparecendo, das mais simples para as mais complexas, sem falhar nenhuma. Esta última página é mais ambiciosa do que as precedentes. Está aqui em causa a questão 5+?=7, intimamente ligada à subtracção. Claro que não se trata de falar de equações. A ligação natural que existe entre o acto de juntar 5 limões com 2 limões originando um total de 7 limões com o acto de separar novamente é o que está na base da ligação íntima que a adição tem com a subtracção. É de forma natural que a criança tem de apreender essa ligação.



Existem inúmeras maneiras de o fazer. Mostrar 8 canetas e esconder 5 atrás das costas. É claro que tem de ser mostrado à criança o antes e o depois, tal como é feito no livro. Repare-se como toda a parte de baixo da página tem como foco único a relação entre a adição e a subtracção.

O terceiro capítulo, que apenas aparece depois da abordagem das partições, trata da adição e de alguma **formalização**. Em Singapura não existe medo de colocar páginas de formalização e de organização nos livros para crianças. Existe a ideia de que as crianças ainda necessitam mais de definições e de organização do que os adultos. Repare-se na próxima página.

Esta página tem um conteúdo extraordinário. Há a importância da **oralidade** (típico no sistema de Singapura). Há a extrema importância do significado (adição/juntar). Há setas (algo recorrente nos livros de Singapura) indicando que algo está a acontecer: estamos a juntar. Ao longo dos livros, os balões de fala nascem quase sempre de crianças. De facto, tenta-se que a sequência dos conceitos apareça de forma tão encadeada e tão natural, que mesmo as formalizações, o explicitar dos significados, etc., quase poderiam ser feitos pelas próprias crianças.

Uma das coisas fantásticas dos livros de Singapura é a ênfase em **tipos diferentes de acções**. Repare-se como nesta página há dois tipos totalmente distintos: dinâmico e estático. No dinâmico alguma coisa muda com o tempo. A figura em baixo mostra duas crianças a chegar. Em relação ao estático, nada muda mas há características distintas nos objectos. No exemplo em cima é a cor. Isto, embora possa não parecer é de grande importância. É, no fundo, a essência da abstracção na matemática. Uma conta de somar como 6+4 pode aplicar-se a inúmeros episódios da realidade.

Isto é, aliás, talvez a principal causa do enorme poder da matemática, e este tipo de abordagem parece realmente o indicado para transmitir esse carácter abstracto a uma criança de 6 ou 7 anos de idade.

(CONTINUA)

PROBLEMA DO MÊS (XV)

CAMINHOS NO TABULEIRO

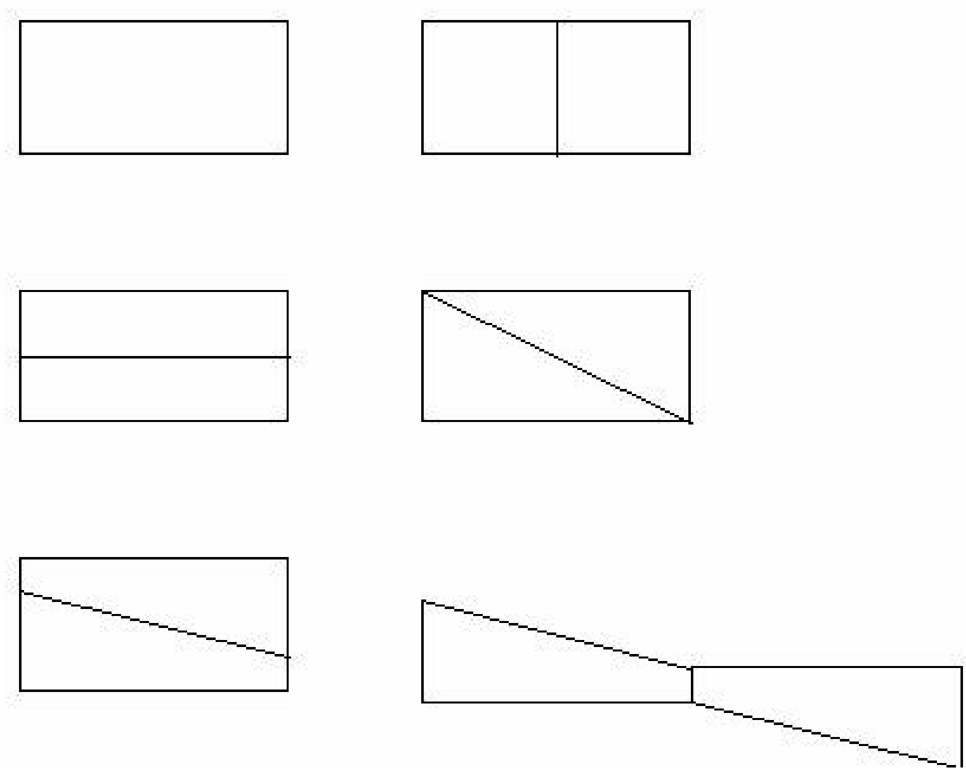
Pedro Palhares
Universidade do Minho

No problema XIII pedia-se para considerar um rectângulo de medidas 1 por 2. Depois cortar esse rectângulo em duas metades, através de um corte rectilíneo. Depois juntar as duas metades justapondo dois lados congruentes, formando uma nova figura com a mesma área do rectângulo de partida. Colocavam-se então duas questões,

a) quantas figuras diferentes (que não sejam congruentes entre si) se podem formar?

b) Qual o polígono que se pode obter com maior perímetro?

A partir da figura de baixo é fácil de ver que através dum corte paralelo aos lados menores, formando dois quadrados, não se consegue nova figura. A partir dum corte paralelo aos lados maiores consegue-se uma nova figura, um rectângulo em que um lado tem o quádruplo de outro. A partir dum corte por uma diagonal vão-se poder obter 5 novas figuras, dois triângulos, um papagaio, e dois paralelogramos.



Já temos 6 figuras. O pior é quando cortamos por uma linha a passar pelo centro do rectângulo mas que não passa por nenhum vértice nem nenhum ponto médio. É que agora temos uma infinidade de possibilidades para essa linha e cada linha assim traçada (na figura de cima temos um exemplo de linha a unir pontos nos lados menores mas há também as linhas que unem pontos nos lados maiores) permite formar 8 novas figuras, algumas convexas, outras côncavas.

Há uma infinidade de figuras diferentes (que não sejam congruentes) que se podem obter por este processo.

Quanto à segunda questão vou recorrer ao meu paciente e diligente leitor Pedrosa Santos, que me enviou uma solução, da qual coloco aqui a forma resumida. Faço apenas notar que é de um corte como aparece na parte final da figura de cima que estamos a falar. E quanto à resposta à pergunta feita, recordando que se pergunta qual o polígono, pois a verdade é que não me parece possível dar uma resposta, dependendo no entanto da definição de polígono que se tiver...

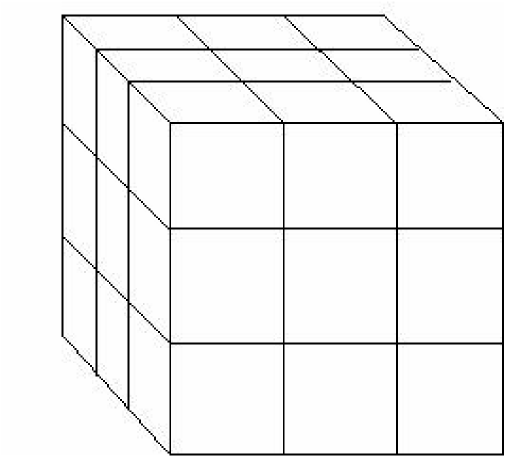
> Dados dois polígonos iguais, convexos e de lados não iguais dois a dois, quando unidos por um lado homólogo constituem um outro polígono, não necessariamente convexo.
>
> O perímetro deste polígono, assim constituído, por justaposição de um lado, será máximo quando os lados justapostos dos polígonos constituintes forem os de menor comprimento daqueles.
>
> Assim, no caso em apreço, quanto mais pequeno fizermos o lado escolhido para a união das duas figuras (geometricamente iguais), maiores ficarão os lados (de comprimento variável), computáveis para o perímetro da figura composta.
>
> Como o comprimento de qualquer lado só tem sentido enquanto for representado por um número real diferente de zero, o perímetro máximo que se poderá obter corresponde ao facto de fazermos tender para zero o comprimento do menor lado, a que, neste caso em estudo, equivale o valor de $6+2\sqrt{5}$ u.c. (unidades de comprimento)
> Logo, o perímetro real máximo terá um valor na vizinhança daquele número, sendo-lhe no entanto inferior; isto é, será $\left(6+2\sqrt{5}-L\right)$ u.c., sendo L um valor tão pequeno quanto se quiser.

Afinal, o problema não é tão *básico* como parecia!

*****

O problema do número anterior dizia:

Estamos a trabalhar com uma serra eléctrica e queremos cortar um cubo de madeira em 27 cubos iguais. Podemos fazer isso fazendo seis cortes no cubo, mantendo as peças juntas em cada corte. Será que podemos reduzir o número de cortes necessário, através da redisposição das peças após cada corte?

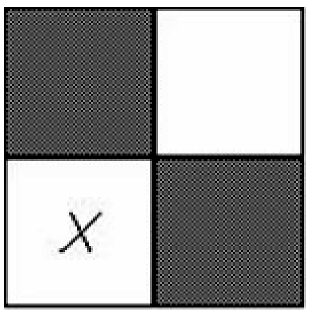


Para quem ainda não conseguiu obter uma resposta, vou dar uma pista que funcione como uma visão interior. Concentrem-se no cubo que não se vê e tentem ver como o podemos ficar a ver.

*****

Para este número seleccionei o seguinte problema:

Se considerarmos o tabuleiro de baixo e começarmos no quadrado marcado com x, é fácil encontrar um caminho em movimentos horizontais ou verticais que passe por todos os quadrados uma e uma só vez. É até fácil de ver que há apenas dois caminhos. O que é que acontece quando aumentar o tabuleiro (sempre nxn) mantendo o começo do caminho no quadrado imediatamente abaixo do superior esquerdo?



Quem quiser comentar ou apresentar solução pode fazê-lo enviando e-mail para <u>*palhares@iec.uminho.pt*</u>, colocando problema do mês como título.

SANGAKU

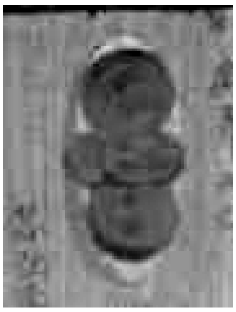
Antonieta Constantino

Este problema encontra-se num *sangaku* existente na prefeitura de Nagano.

Como já aconteceu numa edição anterior, este é mais um exemplo de um problema geométrico do período de Edo, envolvendo figuras no espaço.

***Sangaku* existente em Nagano**

Nagano – Japão



Pormenor do *sangaku* de Nagano

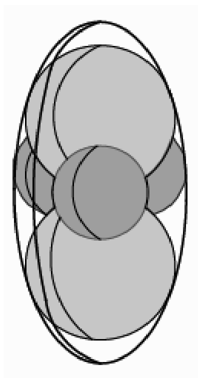


Fig. 1

Problema:

Num elipsóide $E(a,b)$ existem duas esferas $O_1(r_1)$ e $O_2(r_1)$, tangentes entre si e a $E(a,b)$ e três esferas $O_3(r_2)$, $O_4(r_2)$ e $O_5(r_2)$ tangentes entre si, a $E(a,b)$ a $O_3(r_2)$, a $O_4(r_2)$ e a $O_5(r_2)$.

Determinar r_1 e r_2 em função de a e b.

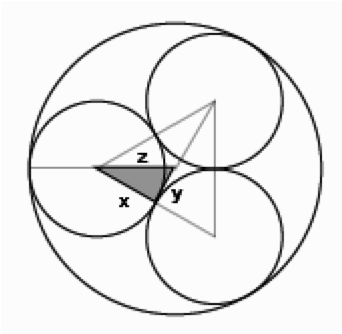


Fig. 2

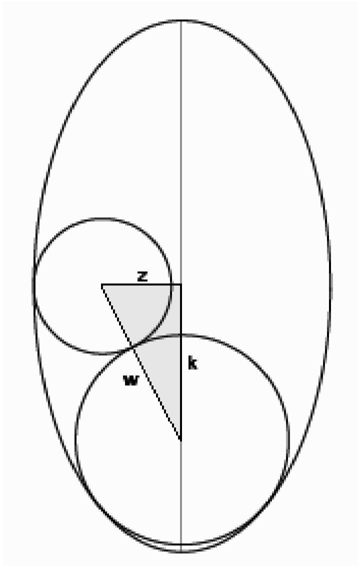


Fig. 3

Intersectando por um plano perpendicular ao eixo maior do elipsóide e que contenha o seu centro, obtém-se quatro circunferências como indicado na *Fig. 2*

Intersectando por um plano que contenha o eixo maior do elipsóide e que contenha o centro de uma das três circunferências menores, obtém-se uma elipse e duas circunferências como indicado na *Fig. 3*

Construindo os triângulos rectângulos como indicado nas figuras e utilizando razões trigonométricas e o teorema de Pitágoras obtém-se,

Utilizando a *Fig.2*

$$x = r_1$$

$$z = b - r_1$$

$$y = r_1 \tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} r_1$$

donde,

$$\left(b - r_1\right)^2 = r_1^2 + \frac{3}{9} r_1^2$$

$$\Leftrightarrow b^2 - 2br_1 + r_1^2 = r_1^2 + \frac{1}{3} r_1^2$$

$$\Leftrightarrow r_1^2 + 6br_1 - 3b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow r_1 = -3b \pm \sqrt{9b^2 + 3b^2}$$

$$\Leftrightarrow r_1 = \left(-3 \pm 2\sqrt{3}\right) b$$

$$\Leftrightarrow r_1 = \cancel{\left(-3 - 2\sqrt{3}\right)} b \quad \vee \quad r_1 = \left(-3 + 2\sqrt{3}\right) b$$

Utilizando a *Fig. 3,*

$$z = b - r_1$$

$$w = r + r_1$$

$$k = \frac{\sqrt{\left(a^2 - b^2\right)\left(b^2 - r^2\right)}}{b}$$

donde,

$$\left(r + r_1\right)^2 = \left(b - r_1\right)^2 + \frac{\left(a^2 - b^2\right)\left(b^2 - r^2\right)}{b^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(r + r_1 + b - r_1\right)\left(r + r_1 - b + r_1\right) b^2 = \left(a^2 - b^2\right)\left(b^2 - r^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(r + b\right)\left(r - b + 2r_1\right) b^2 = \left(a^2 - b^2\right)\left(b - r\right)\left(b + r\right)$$

$$\Leftrightarrow rb^2 - b^3 + 2b^2 r_1 = a^2 b - a^2 r - b^3 + b^2 r$$

$$\Leftrightarrow a^2 r = a^2 b - 2b^2 r_1$$

$$\Leftrightarrow r = b - \frac{2b^2}{a^2} r_1$$

e substituindo r_1 pelo valor determinado em (1),

$$\Leftrightarrow r = b - \frac{2b^2}{a^2}\left(2\sqrt{3} - 3\right) b$$

$$\Leftrightarrow r = b - \frac{2\left(2\sqrt{3} - 3\right) b^3}{a^2}$$

Logo,

$$r_1 = \left(-3 + 2\sqrt{3}\right) b \qquad \text{e} \qquad r = b - \frac{2\left(2\sqrt{3} - 3\right) b^3}{a^2}$$

GEOMETRIA DO COMPASSO

Parte II

Liliana Monteiro

Resultado 7: A intersecção de duas *rectas de compasso* é um *ponto de compasso*.

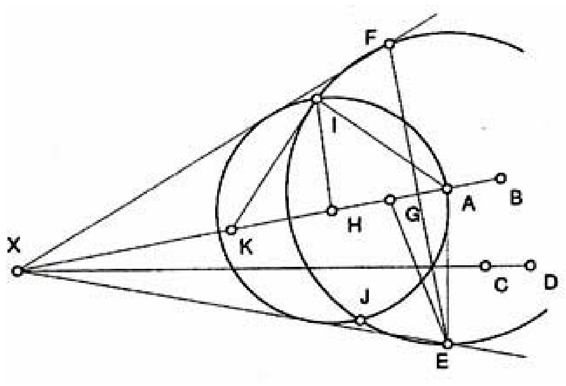
Demonstração: Sejam A, B, C e D *pontos de compasso* não colineares três a três e seja X o ponto de intersecção de AB e CD. Suponhamos ainda, sem perda de generalidade, que $X \neq A$.

Designemos por E o ponto que é imagem de A através da reflexão em CD.

Se AB e CD forem perpendiculares, então X é o *ponto de compasso* que corresponde ao ponto médio de $[AE]$.

Suponhamos agora que AB e CD não são perpendiculares. Designamos então por F o *ponto de compasso* que é imagem de E através da reflexão em AB, e por G o *ponto de compasso* que é imagem de A através da reflexão em EF.

Os triângulos $[AXE]$ e $[AEG]$ são semelhantes, pois são ambos isósceles e têm ângulos adjacentes à base iguais, pelo que $\dfrac{\overline{AX}}{\overline{AE}} = \dfrac{\overline{AE}}{\overline{AG}}$, ou seja, $\dfrac{\overline{AE}^2}{\overline{AG}} = \overline{AX}$.



Seja n um natural tal que $\overline{AE} < 2n\overline{AG}$ (na imagem é exemplificado o caso $n = 2$). Então o ponto H, pertencente a AG tal que $\overline{AH} = n\overline{AG}$, é um *ponto de compasso*. Deste modo, H_A e A_E intersectam-se em dois *pontos de compasso*, digamos I e J. Também I_A e J_A se intersectam em dois *pontos de compasso* A e K. Concluímos então que os triângulos $[AIK]$ e $[AHI]$ são semelhantes, pois são ambos isósceles e têm ângulos adjacentes à base iguais, pelo que $\dfrac{\overline{AK}}{\overline{AI}} = \dfrac{\overline{AI}}{\overline{AH}}$.

Consideremos ainda o *ponto de compasso* Y em AK tal que $\overline{AY} = n\overline{AK}$.

Temos que

$$\overline{AY} = n\overline{AK} = n\frac{\overline{AI}^2}{\overline{\overline{AH}}} = n\frac{\overline{AE}^2}{n\overline{\overline{AG}}} = \frac{\overline{AE}^2}{\overline{\overline{AG}}} = \overline{AX}$$

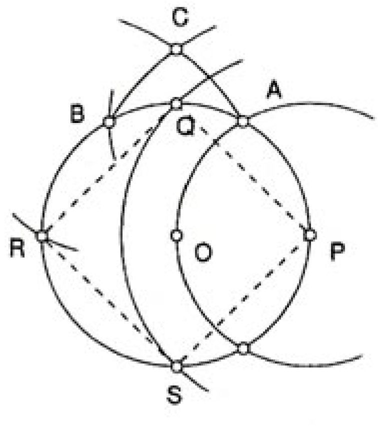
e X e Y são pontos de AG. Deste modo, $X = Y$ e, consequentemente, X é um *ponto de compasso.*

Resultado 8: Se A, B, C e D são *pontos de compasso* tais que AB intersecta C_D e se C não pertence a AB, então os pontos de intersecção de AB e C_D são pontos de compasso.

Demonstração: Sejam C' e D' as imagens de C e D através da reflexão em AB, respectivamente. As *circunferências de compasso* C_D e C'_D intersectam AB nos pontos de intersecção de AB e C_D.

Resultado 9 – Problema de Napoleão: Se P e O são *pontos de compasso* distintos, então os pontos P, Q, R e S tais que $[PQRS]$ é um quadrado são *pontos de compasso.*

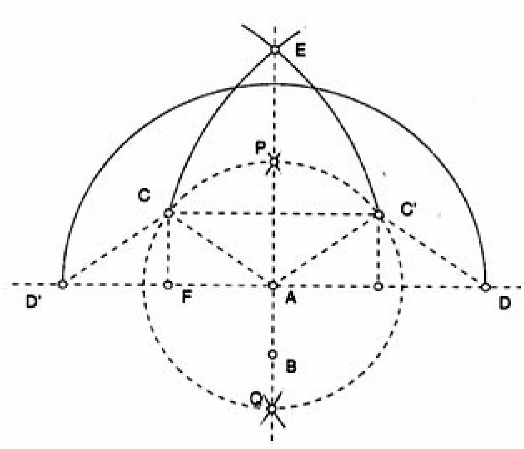
Demonstração: Esta demonstração segue a construção de Mascheroni ao lado.



Considerando $\overline{OP} = 1$, temos que $\overline{PR} = 2$ e $\overline{PC} = \overline{PB} = \sqrt{3}$. Uma vez que OC é perpendicular a OP, temos, pelo Teorema de Pitágoras, que $\overline{PQ} = \overline{PS} = \overline{OC} = \sqrt{\overline{PC}^2 - \overline{OP}^2} = \sqrt{2}$, o que prova que temos um quadrado.

Resultado 10: Se A, B e C são três *pontos de compasso* distintos, então os pontos de intersecção de AB e A_C são *pontos de compasso.*

Demonstração: Suponhamos que *C* pertence a *AB*. Então o resultado pretendido é imediato pelo resultado anterior.



O mesmo acontece se $AC \perp AB$.

Suponhamos que não se dá nenhum dos casos anteriores. Então a imagem C' de *C* através da reflexão em *AB* é um *ponto de compasso* diferente de *C*.

Além disso, o ponto *D*, tal que $[ACC'D]$ é um paralelogramo, é um *ponto de compasso*, pois é a intersecção de $A_{\overline{CC'}}$ e C'_A. Do mesmo modo, a imagem D' de *D* através da reflexão em *AB* é um *ponto de compasso.* Consideremos ainda um ponto de compasso *E* em *AB* na intersecção de D_C e D'_C.

Designemos por *P* e *Q* o pontos de intersecção do enunciado do resultado. Queremos provar que estes pontos são a intersecção de $D_{\overline{AE}}$ e $D'_{\overline{AE}}$, ou seja, que $\overline{DP} = \overline{AE}$. Designando por *F* o pé da perpendicular a *AD* que passa por *C*, temos que $\overline{AD} = \overline{CC'} = 2\overline{AF}$ e que $\overline{DF} = 3\overline{AF}$. Deste modo, aplicando o Teorema de Pitágoras, temos que

$$\begin{aligned}
\overline{DP}^2 &= \overline{AP}^2 + \overline{AD}^2 = \\
&= \overline{AC}^2 + \overline{AD}^2 = \\
&= \overline{CF}^2 + \overline{AF}^2 + \overline{AD}^2 = \\
&= \overline{DC}^2 - \overline{DF}^2 + \overline{AF}^2 + \overline{AD}^2 = \\
&= \overline{DC}^2 - \left(3\overline{AF}\right)^2 + \overline{AF}^2 + \left(2\overline{AF}\right)^2 = \\
&= \overline{DC}^2 - \left(2\overline{AF}\right)^2 = \\
&= \overline{DE}^2 - \overline{AD}^2 = \\
&= \overline{AE}^2
\end{aligned}$$

como queríamos mostrar.

Resultado 11: Os pontos de intersecção de uma *recta de compasso* e uma *circunferência de compasso* são *pontos de compasso.*

Demonstração: Este resultado é consequência imediata dos resultados 8 e 10.

Teorema de Morh-Mascheroni: Um ponto é um *ponto de compasso* sse é um *ponto euclidiano*.

Demonstração: Trivialmente, um ponto construtível na Geometria do Compasso é também construtível com régua não graduada e compasso, ou seja, na Geometria Euclidiana.

Relativamente ao recíproco, a definição de *ponto de compasso* e os resultados 7 e 11 provam que todos os pontos construtíveis com compasso e régua não graduada são também construtíveis apenas com compasso, o que prova o teorema.

Vimos assim a equivalência entre a Geometria do Compasso e a Geometria Euclidiana. Saliente-se ainda a prova, através do resultado 3, de que, sem o auxílio da régua, o compasso euclidiano (sem memória) é equivalente ao compasso moderno (com memória).

Referências Bibliográficas:

[Mar98] George E. Martin, *Geometric Constructions*, Springer-Verlag, New York, 1998

[Mont09] Liliana Monteiro, *Fundamentos Matemáticos do Origami*, Associação Ludus, Lisboa, 2008

Índice